

ビュフォンの針の線の引き方を変えた際の確率の導出

2年4組 清家 翔徳 2年4組 二宮 充梧
2年4組 楠 遥駿 2年3組 清水 泰雅
指導者 赤松 弘教

1 課題設定の理由

数学のテーマを調べているときに、「ビュフォンの針」という実験に出会った。この実験は円周率と確率が結びつく興味深い分野である。これをさらに発展させることで、この実験の汎用性（格子状や正○角形上などの線の引き方）を高めることができるのではないかと思います研究テーマを決めた。

2 ビュフォンの針とは(先行研究)

$l(\leq d)$ の針を適当に投げた時、針が線と交わる確率は $\frac{2l}{\pi d}$ である。【図1】

この確率には円周率が登場するため実験を行えば π の値を近似することができる。

この確率の導出は高校数学の範囲で説明可能である。

針の中心 A から最も近い線までの距離を y ($0 \leq y \leq \frac{d}{2}$)、

針と直線のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とする。【図2】

【図2】から針と線が交わるのは $y \leq \frac{l}{2} \sin \theta$ となるときなのでそのような確率を求めればよい。

求める確率は $(0 \leq y \leq \frac{d}{2})$, $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ の範囲で

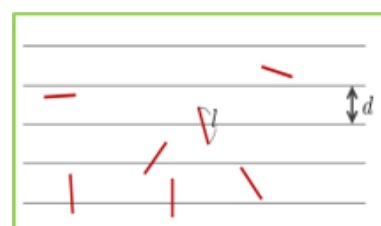
$y \leq \frac{l}{2} \sin \theta$ となるときである。

したがって【図3】において(斜線の部分の面積)÷(全体の長方形の面積)で求めることができる。

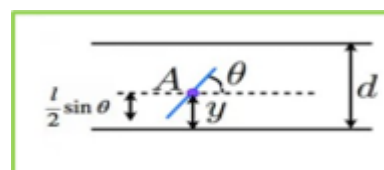
これらから、長方形の面積は $\frac{\pi d}{4}$ 、

斜線の部分の面積は $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin \theta d\theta = \frac{l}{2}$ であるので、

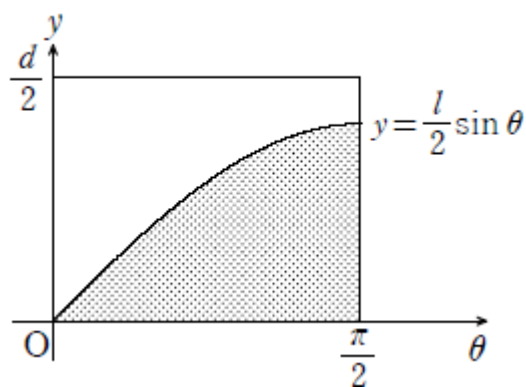
求める確率は $\frac{2l}{\pi d}$ である。



【図1】



【図2】



【図3】

また、先行研究として投げるものを針から正三角形や正方形に変えた場合においても π の近似を行うことが可能であることがわかっている（大内俊二ら）。

3 仮説

(1) 高校生の範囲で、ビュフォンの針の線の引き方を変えても確率を導出することができる。

- (2) 求めた確率を用いてシミュレーションを行い、 π を近似することができる。
 (3) (2)の近似値を利用することで(1)の確率の導出の整合性を図ることができる。

4 研究の方法

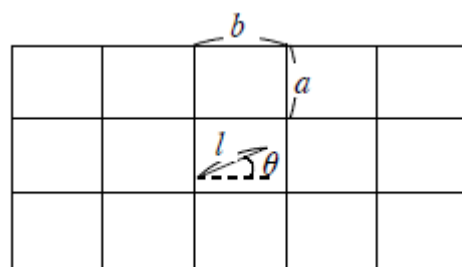
ビュフォンの線の引き方を平行線から、正方形（長方形）や平行四辺形など線の引き方を変化させ、その時のそれぞれの確率を導出する。

5 確率の導出

【正方形（長方形）における確率の導出】

横の平行線の幅を a 、縦の平行線の幅を b 、針の長さを l ($0 \leq l \leq a, b$)、針と横の平行線のなす角を

θ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とする。【図4】



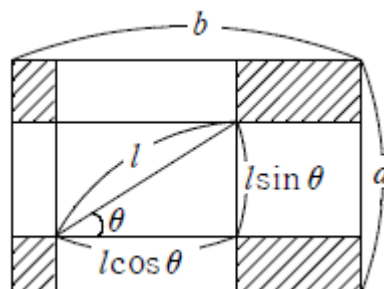
【図4】

$F(\theta) = ab - bl\cos\theta - la|\sin\theta| + \frac{l^2}{2}|\sin 2\theta|$ と設定す

る。(※ $F(\theta)$ は【図5】の斜線部分の面積を指す)
 とすると、ある θ が与えられたとき、針と線が交わらない確率は $\frac{F(\theta)}{ab}$ で求められる。

そして、 θ の範囲は ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) なので、範囲の中で変化する面積の総和を求めることができ、また全事象は

πab なので、針と線が交わらない確率は $\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta}{\pi ab}$ となると予想し、針と線が交わる確率は交わらない確率の余事象なので、



【図5】

$1 - \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta}{\pi ab}$ が交わる確率と予想した。

$1 - \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta}{\pi ab}$ を計算すると、 $\frac{2l(a+b)-l^2}{\pi ab}$ が求められる。

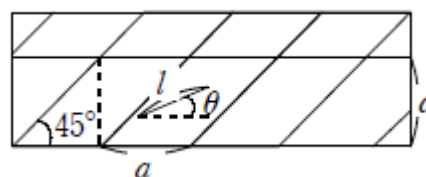
また、正方形なので $a = b$

したがって、 $\frac{4al-l^2}{\pi a^2}$ となる。

【平行四辺形における確率の導出】

横の平行線の幅を a 、針の長さを l ($0 \leq l \leq a$)、針と横の平行線のなす角を θ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とする。

また、斜めと横線のなす角を 45° 【図6】とする。



【図6】

$$F(\theta) = a^2 - al \cos \theta + \frac{l}{2} |\sin 2\theta| - l^2 \sin^2 \theta$$

と設定する。ある θ が与えられたとき、針と線が交わらない確率は $\frac{F(\theta)}{a^2}$ で求められる。

そして θ の範囲を $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ と定めると、範囲の中で変化する面積の総和【図7】を求めることができ、また全事象は πa^2 なので針と線が交わ

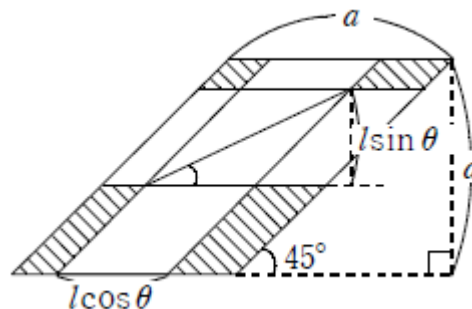
ない確率は、 $\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta}{\pi a^2}$ となると予想し、針と線が交わ

る確率は交わらない確率の余事象なので、

$$1 - \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta}{\pi a^2} \text{ が交わる確率になると予想した。}$$

$$1 - \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta}{\pi a^2} \text{ を計算すると}$$

$$\frac{4al + l^2(\pi - 2)}{2\pi a^2} \text{ が求められる。}$$



【図7】

6 シミュレーションにおける検証

モンテカルロ法を用いたシミュレーションを通して、導出した確率式が正しいか調べた。モンテカルロ法は確率変数のサンプリングをコンピューターを用いて行うことで、数学的問題を（主として数理統計学における意味で）数値的に解く手法のことである。私たちは Python を利用し、 π の近似を通して式の正しさを調べた。（長方形：【図8】、平行四辺形【図9】）

5で求めた正方形における針と線が交わる確率 $\frac{4al - l^2}{\pi a^2}$ について $a=2$ 、 $l=1$ とし、10,000,000 本

$$\text{針を投げた結果、5,570,463 本交わった。これらより、} \frac{7}{4\pi} = \frac{5,570,463}{10,000,000}$$

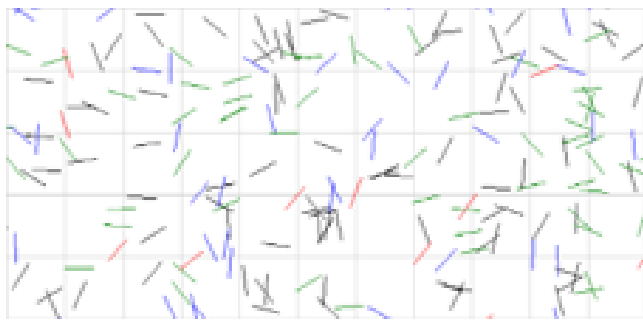
これを π について解くと、 $\pi = 3.1415\cdots$ となり、求めた確率を用いて π を近似することができた。

このことから、5で求めた正方形における針と線が交わる確率が正しいといえる。

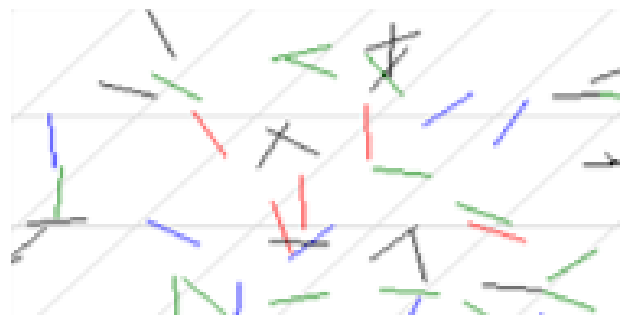
同様に、平行四辺形における確率 $\frac{4al + l^2(\pi - 2)}{2\pi a^2}$ について、 $a=2$ 、 $l=1$ とし、10,000,000 本針を

$$\text{投げた結果 6,270,759 本交わった。これらより、} \frac{\pi + 6}{8\pi} = \frac{6,270,759}{10,000,000}$$

これを π について解くと、 $\pi = 1.356\cdots$ となり、求めた確率では π を近似することができなかった。このことより、求めた確率に誤りがある、または平行四辺形では π の近似ができないという2通りの可能性が考えられる。



【図8】



【図9】

7 まとめと今後の課題・考察

線の引き方を平行線から長方形（正方形）に変更しても高校数学の範囲で π の値を近似することができた。

一方で、平行四辺形に関しては近似することができなかったため、仮説に基づくならば確率の導出が誤っているようである。

しかしながら、先行研究で分かっていることは針の形状を変化させても π の値の近似を行うことができるということである。今回、確率の導出が誤っているのか、平行線の形状を変化させた際の π の値の近似ができないのかどうかは分かっていない。

今後、確率の導出手法を変えることで、平行四辺形、三角形、円などの他の図形へ拡張させることができるのか検証していきたい。

参考文献

Weisstein, Eric W. "Buffon-Laplace Needle Problem."

https://doi.org/10.32296/jjsme.75.9_27