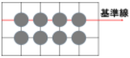
チェッカージャンプの一般化

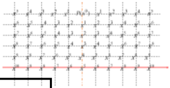
愛媛県立宇和島東高等学校

チェッカージャンプのルール（縦横）



①格子線の横線の１つを基準線（0段目）とする。
②基準線以下に駒を配置する。
③縦横に隣り合った駒を1つ飛び越え、飛び越えられた駒は取り除く。
　※2つ以上の駒を飛び越えたり、斜めの移動はできない。

5段目に上がれないことの証明



到達目標点に点P（＝1）を与え、点Pを中心にxのべきを並べる。（図１）
駒の動きを3種類に分ける。

①点Pに近づく動き	$x^{n+2}+x^{n+1}\longrightarrow x^n$	$x^n-(x^{n+1}+x^{n+2})$
②点Pから遠ざかる動き	$x^n+x^{n+1}\longrightarrow x^{n+2}$	$x^{n+2}-(x^{n+1}+x^n)$
③点Pまでの距離が不変な動き	$x^{n+1}+x^n\longrightarrow x^{n+1}$	$x^n-(x^{n+1}+x^n)$

「①→べきの合計の増減なし」「②③→べきの合計が減少」を満たすようなxの値を決定

$$x^n-(x^{n+1}+x^{n+2})=0 \ \leftrightarrow\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cong 0.618$$

②③の移動ではxのべきの合計が減少し、移動前後でxのべきの合計は増加しない

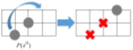
基準線以下のxのべきの合計が1以上であることは、点pに到達するための必要条件である

基準線以下の全ての格子点に無限個の駒を並べたとする
基準線以下のべきの合計をSとすると

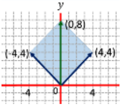
$$S=\frac{x^5}{1-x}+2\left(\frac{x^6}{1-x}+\frac{x^7}{1-x}+\frac{x^8}{1-x}+\cdots\right)=\frac{x^5}{1-x}+\frac{2x^6}{1-x}(1+x+x^2+\cdots)=\frac{x^5}{1-x}+\frac{2x^6}{1-x}\times\frac{1}{1-x}=1$$

実際には無限個の駒を有限回操作で動かすことは不可能→5段目到達不可能

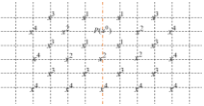
先行研究



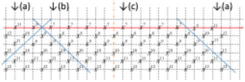
より高く上がるために駒の動きを縦横から両斜めに変更
ベクトルを用いて最高到達点を予想→6、7、8段目が最高到達点？（図1）



（図1）



（図2）



（図3）

駒の動きが両斜め方向の場合も縦横の場合と同様のアイディアで考察できる。
①到達目標点に点P（＝1）を与え、点Pを中心にxのべきを並べる。（図2）
②基準線以下のべきの合計を計算する。（（図3）のような領域に分割すると計算可能。）
べきの合計をSとする。

点p＝7段目の時

$S=0.978<1$

点p＝6段目の時

$S=1.437>1$

したがって最高到達点は計算上6段目であることが分かる。

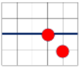
今年度の研究

目的：6段目までの最小手数配置の発見および駒の動きを一般化した場合についての考察

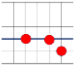
6段目までの最小手数配置

5段目までは最小手数配置を発見。
6段目は到達できることは実証したが、最小手数配置は未発見。

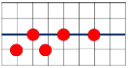
1段目のとき　$x + x^2 = 1$



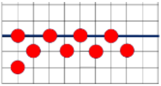
2段目のとき　$2x^2 + x^3 = 1$



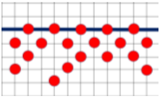
3段目のとき　$3x^3 + 2x^4 = 1$



4段目のとき　$4x^4 + 4x^5 + x^6 = 1$



5段目のとき　$5x^5 + 6x^6 + 4x^7 + 3x^8 + x^9 = 1$

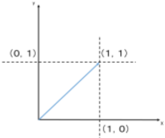


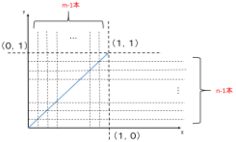
点Pに到達した時点で残りの駒が点P上の駒のみ、かつ、べきの合計が1であるから
最小手数配置であることが分かる。最小手数配置は他にもある可能性がある。

駒の動きの一般化

(1,1)、(－1,1)方向の動き → **駒の動きを互いに素な自然数m、nを用いて (m、n)、(－m、n) 方向に一般化**

X軸の１目盛りをm分割、y軸の一目盛りをn分割すると・・・





分割後の（1，1）は(m,n)と見なせる。つまり(m,n)方向の動きは（1，1）方向の動きに帰着される。

したがって先行研究から最高到達点は6n段目である。（最高到達点はnに依存する）

まとめと今後の課題

6段目に上がれることを実証し、5段目までの最小手数配置を発見した。さらに駒の移動を一般化した場合の最高到達点が6n段目であることが分かった。
今後は、6段目の最小手数配置を発見し、駒の動きが左右非対称の場合の最高到達点についても考察したい。

参考文献

Ross Honsberger,1976,Mathematical Gems Ⅱ,p23-28