一番くじの確率と最適なタイミング

１年１組　江崎龍ノ介　１年１組　濱田　闘志
１年２組　久能　大河　１年２組　高田　悠生
指導者　長瀧　　剛

１　課題設定の理由

くじを引く場合において高校数学で学習した通り、一般的には何番目にくじを引いても当たる確率はすべて等しく（当たりくじの本数）／（くじの総数）で求めることができる。しかし、２回目以降にくじを引く場合、その１本が当たる確率は確実に変化している。私たちはその１本１本に着目し、条件が変化していく中で、くじが当たる確率はどのように変化するかに興味を持った。そして、よりお得に一番くじを購入する条件を明らかにすることを目的に本研究を行った。

２　研究の方法

数学的な確率を考えると自分が引くまでの確率も考慮する必要があり、この時の確率は m/ℓ で一定となると考えられる。そこで、本研究においては、その状態になるまでの確率は考慮しないものとし、自分がその時に当たりを引く確率を求める。引く本数や買うタイミング、あたりの本数などの条件を変化させて計算する。なお、それぞれの文字を下のように定める。

自分たちが引くまでに当たりが引かれる事象：A、自分たちが当たりを引く事象：B

くじ全体の本数：ℓ 本、当たりの本数：m 本、引く本数：k 本（n 番目のとき　ℓ-k+1>0 ）

３　結果と考察

ア　期待値を利用して考える。

下**表１**のような条件下における期待値を考える。

表1　期待値のデータ

	1	2	3	合計
本数（本）	1	2	2	5
景品の値段（円）	500	200	100	
確率	0.2	0.4	0.4	1

（期待値）＝（確率変数）×（確率）であることを利用して期待値を E、引く本数を x とすると、当たりくじが１本の場合は、E(1)＝220 となり、当たりくじが 5 本の場合までの期待値を求めたところ、E(x)＝220x となったため、線形性があるのではないかと考察した。期待値に線形性があるとき、これは単調に増加する関数となり、タイミングを考察するのに適さないため、本研究においては用いないものとする。

イ　ℓ 本中 2 本が当たりくじを n 番目に３本引くとして確率を考える。

P(A)＝n/ℓ

［1］(A,B)＝(1,1)のとき

$P(B)={}_1C_1*{}_{\ell-n}C_2/{}_{\ell-n+1}C_3$

$=3/(\ell-n+1)$

［2］(A,B)＝(0,2)のとき

$P(B)={}_2C_1*{}_{\ell-n}C_2/{}_{\ell-n+1}C_3$

$=6/(\ell-n+1)$

［1］、［2］より求める確率は P(B)＝9/(ℓ-n+1)

ウ　ℓ本中 m 本が当たりくじ n 番目に２本引くとして確率を考える。

まずは m=4 として考えると、当たりくじの引かれ方は、(A で引かれる当たりの本数, B で引かれる当たりの本数)として、(0,4)、(1,3)、(2,2)、(3,1)、(4,0)であるが、(4,0)の場合は B の確率が 0 となるので考えないこととする。

よって、

$$P(B)＝({}_4C_1*{}_{\ell-n}C_1/{}_{\ell-n+1}C_2)+({}_3C_1*{}_{\ell-n}C_1/{}_{\ell-n+1}C_2)+({}_2C_1*{}_{\ell-n}C_1/{}_{\ell-n+1}C_2)+({}_1C_1*{}_{\ell-n}C_1/{}_{\ell-n+1}C_2)$$
$$＝\{2/(\ell-n+1)\}(4＋3＋2＋1)$$
$$＝20/(\ell-n+1)$$

これより、m の値を一般化すると以下のようになる。

$$P(B)＝2*{}_{\ell-n}C_1/(\ell-n)*({}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+\ldots\ldots+{}_mC_1)$$
$$＝\{2/(\ell-n+1)\}(1+2+3+4\ldots\ldots+m)$$
$$＝\{2/(\ell-n+1)\}\textstyle\sum_{j=1}^{m} j$$
$$＝\{2/(\ell-n+1)\}\{1/2m(m+1)\}$$
$$＝m(m+1)/(\ell-n+1)$$

エ　ℓ本中 m 本が当たりのくじを n 番目に k 本引くとして確率を考える。

イ、ウから、求める確率として、ℓ、m、n、k の 4 つの文字を用いて下の式が得られる。

$$P(B)＝({}_{\ell-n}C_{k-1}*\textstyle\sum_{j=1}^{m} j)/{}_{\ell-n+1}C_k$$
$$＝\{1/2m(m+1)*{}_{\ell-n}P_{k-1}/(k-1)!\}/({}_{\ell-n+1}P_k/k!)$$
$$＝\{1/2km(m+1)\}/(\ell-n+1)$$
$$＝km(m+1)/2(\ell-n+1)$$

４　今後の課題とまとめ

今後の課題としては、実際に研究結果を検証するなどの方法で実生活に応用することを考えていきたいと考えている。また、研究を行う中で獲得した数学の知識を今後の学習などに生かしていきたい。

謝辞

本研究を進めるにあたり、長瀧先生をはじめとする多くの先生方、周りの方々に、終始熱心な指導をしていただきました。心から感謝いたします。

また、精神面で支え合い、研究を一緒に行った仲間に感謝いたします。これからも継続して、頑張っていきたいと思います。本当にありがとうございました。

参考文献

・山本隆範(2007)くじ引きの解法について(1)、学園論集、131、123−128

・三輪直也(2014)数学を創ることを意図した期待値の概念形成過程に関する研究