素数の可能性

２年４組　宇都宮郁人　２年４組　川添央太郎
２年４組　二井　　智　２年４組　三好　和臣
指導者　石坂　美貴

１　課題設定の理由

愛媛大学の出張講義で、素数について学び、そのときに偶数の４乗と奇数の４乗の和が素数になるのではないかという疑問が生まれ、素数に興味をもった。素数とは、１より大きい自然数で、正の約数が１か自分自身しかないという数字である。素数は現れる順番に法則性がなく、今でも解明されていないことが数多く存在する謎の多い数字である。そこで、素数に関する公式や素数の規則性について詳しく知りたいと考え、素数の可能性を研究することにした。

２　仮説

求める値の範囲を限定することで、その範囲の中の素数を式で表すことができる。

３　研究内容

(1)　素数表の作成

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
231	232	233	234	235	236	237	238	239	240

表１　素数表

〇素数表の作り方

　エラトステネスの篩を用いて素数を見つける。エラトステネスの篩とは、「素数の正の約数は１と自分自身の２つのみ」という性質を利用して素数を見つける方法である。

今回は $\mathrm{n} = 2500$ として考える。つまり 2500 以下の素数をすべて見つける。

手順１　自然数リスト（2～2500）を作成する

手順２　自然数リストの最小の素数をmとする

手順３　リストの中で m以外の mの倍数をふるい落とす

手順４　$m < \sqrt{n}$となるまで手順２，３を繰り返す(今回では$\mathrm{m} = 47$)

リストの中の残った数字が素数となる。

(2)　フェルマーの二平方和定理の追究

奇素数 p を２つの平方和で表すことができる$\Leftrightarrow$ pを４で割った余りは１であるというフェ

ルマーの二平方和定理を発展させることを試みた。様々な数について、二平方和が素数になり、かつ４で割った余りについてエクセルを用いて調べた結果、x^2+8y^2が素数となるx ,yが存在するならば４で割ったときに１余ることがわかった。

【証明】
４で割ることを考慮して、$x=4n+1,4n+2,4n+3$ 、$y=4m+1,4m+2,4m+3$ とする。(n ,mは自然数)
ただし、$4n, 4n+2$ は平方和が偶数となり、素数にはならないので除く。

① $(4n+1)^2+8(4m+1)^2=16n^2+8n+1+128m^2+64m+8$
$=8(2n^2+16m^2+3n+8m+2)+1$

② $(4n+3)^2+8(4m+1)^2=16n^2+24n+9+128m^2+64m+8$
$=8(2n^2+16m^2+3n+8m+2)+1$

③ $(4n+1)^2+8(4m+2)^2=16n^2+8n+1+128m^2+128m+32$
$=8(2n^2+n+16m^2+16m+4)+1$

④ $(4n+3)^2+8(4m+2)^2=16n^2+24n+9+128m^2+128m+32$
$=8(2n^2+3n+16m^2+16m+5)+1$

⑤ $(4n+1)^2+8(4m+3)^2=16n^2+8n+1+128m^2+192m+72$
$=8(2n^2+n+16m^2+24m+9)+1$

⑥ $(4n+3)^2+8(4m+3)^2=16n^2+24n+9+128m^2+192m+72$
$=8(2n^2+3n+16m^2+24m+9)+1$

以上より、示せた。

(3) 範囲を限定して素数を式で表す

x 番目	素数	MOD4	4k + 1型	2~4	5~9	10~16	17~25
1	2	2					
2	3	3		2x − 1			
3	5	1	$4(x-2)+1$				
4	7	3		2x − 1			
5	11	3			3x − 4		
6	13	1	$4(x-3)+1$				
7	17	1	$4(x-3)+1$				
8	19	3			4x − 13		
9	23	3			3x − 4		
10	29	1	$4(x-3)+1$				
11	31	3				4x − 13	
12	37	1	$4(x-3)+1$				
13	41	1	$4(x-3)+1$				
14	43	3				4x − 13	
15	47	3				4x − 13	
16	53	1	$4(x-3)+1$				
17	59	3					4x − 9
18	61	1	$4(x-3)+1$				
19	67	3					4x − 9

20	71	3					4x − 9
21	73	1	$4(x-3)$ $+1$				
22	79	3					4x − 9
23	83	3					4x − 9
24	89	1	$4(x-2)$ $+1$				
25	97	1	$4(x-1)$ $+1$				

表２　範囲を限定した場合の素数

フェルマーの二平方和定理より、$4\mathrm{k}+1$型の素数はすでに式化されているので、それ以外を考える。素数２を１番目、素数３を２番目、素数５を３番目…という風に小さい素数から順に番号を振る。次に、表２のように１番目まで、$(1^2+1)\sim 2^2$番目まで、$(2^2+1)\sim 3^2$番目まで…という風に範囲を限定していくと、x番目の素数を式で表すことができた。（８番目の素数１９を除く）
例えば、２番目の素数は$3=2\times2-1$、５番目の素数は$11=3\times5-4$となる。

(4) フェルマーの二平方和定理をグラフで表現

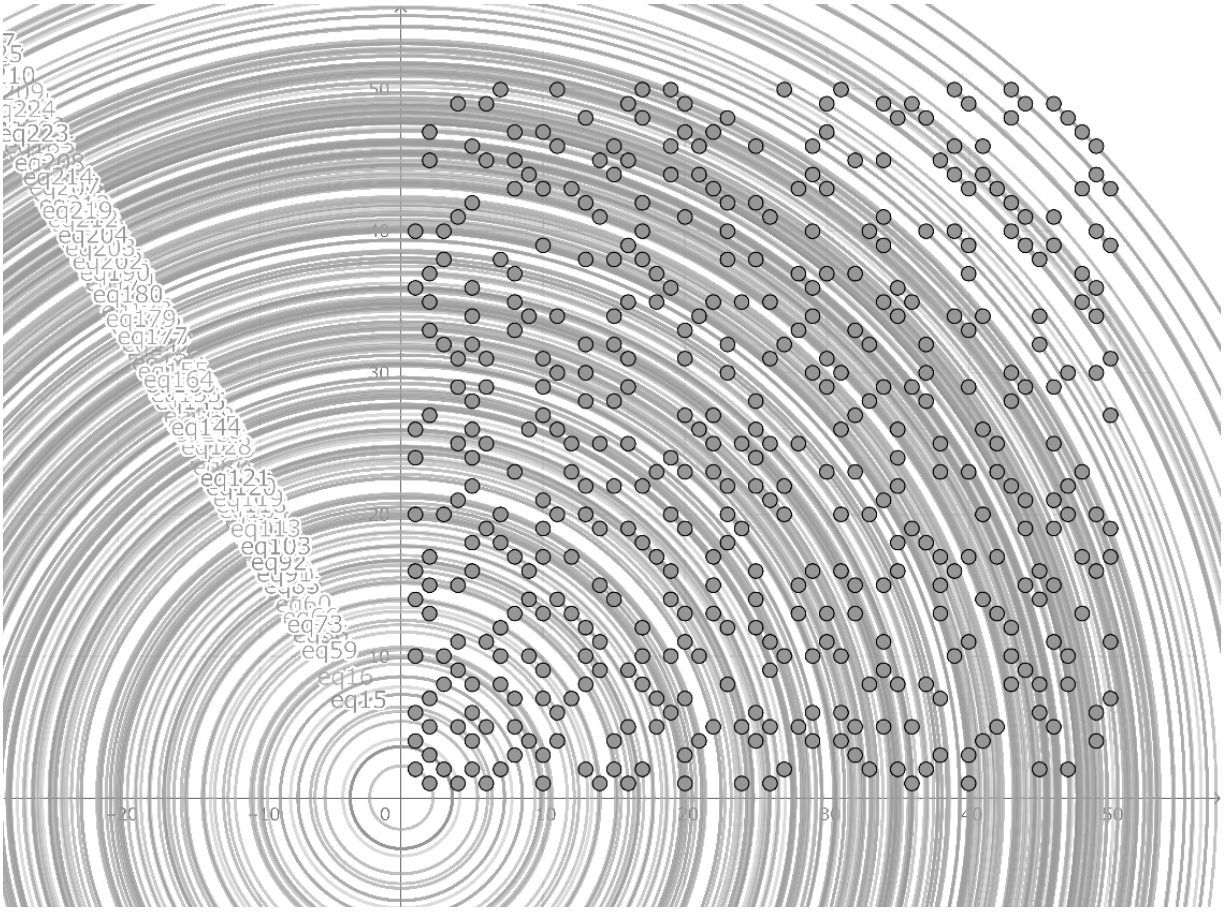

図１　フェルマーの二平方和定理を用いた円

フェルマーの二平方和定理が成り立つとき、x^2+y^2は素数である。これを中心が原点で半径が$\sqrt{素数}$ の円の方程式とみて、GeoGebra というグラフ化ソフトを使いグラフを作った。

〈手順〉

① **表３**のように、x＝奇数（１～49）、y＝偶数（２～50）を入力し、x^2+y^2の値を求め、２個の平方和が素数になるx ,yの組み合わせを見つける。**表３**のＬ列、値の右側の色が付いて

いるところが素数である。

② **表３**で得られたxとy、素数の値を円の方程式に適用してグラフを描いた後、円上にある座標（x ,y）に点を打つ。さらに、xとyの座標を入れ替えた点（x＝偶数、y＝奇数）、すなわちy＝xに関して対称な座標の点もグラフに打ち、傾向を調べる。

B	C	D	E	L	M
x		y		値	
1		2		5	s
3		2		13	s
5		2		29	s
7		2		53	s
9		2		85	5
11		2		125	5
13		2		173	s
15		2		229	s
17		2		293	s
19		2		365	5
21		2		445	5
23		2		533	
25		2		629	
27		2		733	s
29		2		845	
31		2		965	
33		2		1093	s
35		2		1229	s
37		2		1373	s
39		2		1525	
41		2		1685	
43		2		1853	

表３　素数になる平方和の組み合わせ

４　まとめ・考察

・フェルマーの二平方和定理の発展からx^2+8y^2が素数であるとき、その素数を４で割ると余りが１になることがわかった。
・素数が現れる順番をxとすると、範囲を限定することで素数を式で表すことができた。しかし、８番目の素数は例外となった。
・平方和が素数になる２個の数をx ,yとし、x＞０ ,y＞０ の範囲でxy平面上に座標をとって傾向を調べた結果、特に規則性は見られなかった。

５　今後の課題

規則性が見られなかった**図１**の点の分布から、座標の密度が大きい所と小さい所、空白の面積が広いところと狭いところを２種類の色を用いて塗りつぶすなど、アプローチを変えながら今後も規則性がないか調べていく。

範囲を限定した素数の式では、26 番目以降の素数について考察、式化していきたい。

謝辞

本研究に取り組むにあたり、御指導・御助言をいただいた先生方に、お礼申し上げます。ありがとうございました。

参考文献

［１］エラトステネスのふるいとその計算量 ｜ 高校数学の美しい物語（manabitimes.jp）
［２］フェルマーの二平方和定理 ｜ 高校数学の美しい物語（manabitimes.jp）
［３］関数グラフ – GeoGebra（https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja）