折り紙の可能性Ⅱ

２年４組　大野　寛平　２年４組　河野　琉青　２年４組　山本　遥駒
指導者　赤松　弘教

1　課題設定の理由

子供たちによく親しまれている折り紙は様々な可能性を秘めている。そして折り紙は数学と密接な関係を持っており、先行研究でも折り紙を使って正弦の合成や角の三等分の証明など数学の教科書に載っている解法よりも簡単に証明されていることが多く存在する。そこで私たちは、折り紙の性質をうまく利用して、まだ見つかっていない折り紙を使った解法を見つけ、数学にもっと興味関心を持ちたいと思いこの課題を設定した。

2　仮説

先行研究により、折り紙を用いて様々な公式や定理を証明することができることがわかっている。そこで、さらに考察を深めることにより、折り紙の可能性を広げられるのではないか。

(1)　加法定理や正弦の合成を証明することができることがわかっている。そこで、余弦の合成も折り紙を用いて証明することができるのではないか。

(2)　折り紙を用いて３次方程式の解が折れることや、角の三等分、５次方程式の解が折れることがわかっている。そこで、角の五等分や七等分など角の素数等分もできるのではないか。

3　研究の方法

(1)　折り紙を用いた余弦の合成

①　先行研究の正弦の合成について分析する。

②　折り紙を用いて、三角形を作り、辺や角の設定を変更して考察する。

③　成り立つかを証明する。

(2)　折り紙を用いた角の素数等分の証明

①　角の三等分の方法を分析する。

②　①の設定を変えて線分を増やし、何らかの関係性があるかどうか調べる。

③　角の三等分と３次方程式の解との関連を分析し、証明する。

④　③を用いて、角の五等分と５次方程式の解との関連を分析し、証明する。

⑤　①～④を用いて、角の素数等分について考察し、証明する。

4　結果と考察

(1)　折り紙を用いた余弦の合成

①　先行研究の木尾直子さんのものを分析した。

②　図１のように辺や角を設定する。

③　余弦の合成方法

正方形 ABCD の中に∠BFE＝90°の任意の直角三角形 BFE を作る。

ここで、BF=a、EF＝b とする。

三平方の定理より、BE＝$\sqrt{a^2+b^2}$

∠EBF＝β（0＜β＜90°）、∠ABF＝θ（0＜θ＜90°）とする。

平行線の錯角より、∠BFC＝θ
∠CFB＋90°＝∠DEF＋90° より
∠CFB＝∠DEF＝θ となり、
∠ABF＝$\theta-\beta$ となる。
DF＝$b\sin\theta$、CF＝$a\cos\theta$ となり
AB＝$\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$
$\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)=a\cos\theta+b\sin\theta$
これにより、容易に余弦の証明ができる。

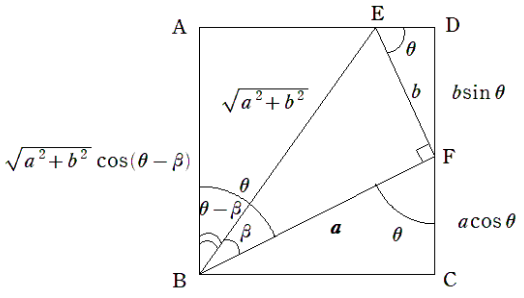

図１

(2)　折り紙を用いた角の素数等分の証明

①　角の三等分の方法（図２）

（ア）　三等分する角を折り紙の左下に作る。

（イ）　折り紙の左側の辺に適当な印を一つ作り、左下のカドの点から印までを二等分となる水平な折れ線をつける。

（ウ）　適当な印を任意の角を作る線分に合わせつつ、左下の角を先ほどつけた水平な折れ線に合わせて折り、カドがくる位置に印をつける。

（エ）　折り紙を開くと水平な折れ線と新しくできた折れ線が交わる点に向けて左下のカドから直線を引くとそれらの直線が任意の角を三等分することができる。

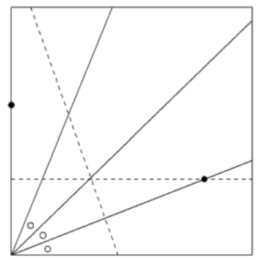
図２

②　①の設定を変えて線分を増やし、何らかの関係性があるかどうか調べる。

①を踏まえて角の三等分の折り方から方法を変えて線分の分割や関係性を見つけ折り紙を使って角の五等分を折るための方法１～３を考えた。

方法１　角の三等分の作図の際に左側の点Ｐ、左下の点Ｑとしたとき PQ を二等分して考えていくのを変えて三等分する点Ｓ，Ｔをつくって残りの手順をしてみる。（図３）

方法２　仮に折り紙に作った任意の角の五等分する線分を作ったとき、三等分のときの折れ線と角を五等分する線分との交点同士にそれぞれの長さに比例関係があるのではないか。（図４）

方法３　五等分した角のうち一角をもつ相似な三角形が５個あるか調べる。（図５）

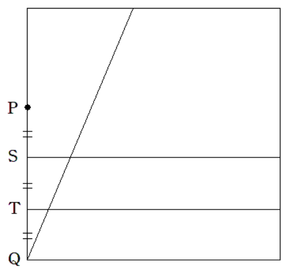

図３

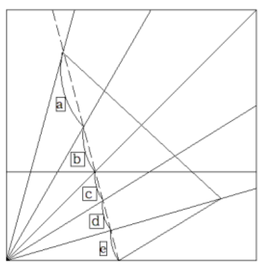

図４

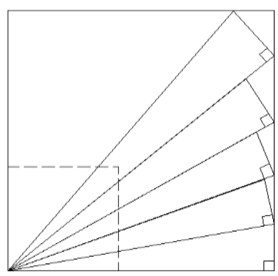
図５

方法１～３の全て結果としては何も角の五等分との関係は見つけられなかった。

③　角の三等分と３次方程式の解との関連を分析し、証明する。（図６、図７）

日本折り紙学会に問い合わせてみた。「３次方程式の解が折り紙で折れることを教えてもらい角の三等分と関係がある」との返答をいただいた。

先行研究より、３次方程式は折り紙が点を直線に折り重ねることができる点を利用し、

折り線から得られる放物線の共通接線ら三次方程式が解けることが分かっている。３次方程式の係数は、座標や方程式を変更していくことで、任意の３次方程式を解くことができる。角の三等分は二つの放物線の共通接線の傾きを求めることで出すことができるので、

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$　ここで、$\cos\theta = x$ とおいて

$4x^3 - 3x - \cos 3\theta = 0$ の解を求められれば、角の三等分をすることができる。

点Aが原点となる焦点、折り紙における折り目となる直線 ℓ_1:準線、$x=0$ との交点を点Ｇとして、点Aと直線 ℓ_1 との距離が等しくなるように放物線 p_1 をとる。

直線 ℓ_2:$y=ax$($a=\tan 3\theta$)が任意の角をつくる直線とすると、$y=0$ となす角は 3θ となる。そして、折り紙の対称性を用いてとった点を焦点Ｆ(2AG＝AF)とし、直線 ℓ_2 を準線とする放物線 p_2 をとる。

p_2 は p_2 上の点Ｐ(x, y)と直線 ℓ_2 の距離が PF に等しいような点Ｐの軌跡である。

$$p_2: x^2 + 2axy + a^2y^2 - 8(a^2+1)y + 16(a^2+1) = 0 \cdots ④$$

放物線 p_1 上の点($2t, 1-t^2$)における接線 ℓ の方程式は、

$$\ell: y = -t(x-2t) + 1 - t^2 = -tx + t^2 + 1 \cdots ⑤$$

となり、⑤を④に代入して求められる x の２次方程式の判別式 $D=0$ となるようにとると、接線 ℓ は放物線 p_1、p_2 それぞれに接する接線となることが分かる。

折り紙の対称性を用いて直線 ℓ が折り目となるように点F′、A´をとる。

直線 ℓ が FF´、AA´の中点なので、点F´、A´がそれぞれ直線 ℓ_2、ℓ_1 上であることが証明できる。点F´、A´の中点をG´とする。

直線 AA´、直線 AG´、直線 ℓ_2 の傾きは、それぞれ $\tan\theta$、$\tan 2\theta$、$\tan 3\theta$ となる。

ℓ が放物線 p_2 の接線、ℓ_2 が p_2 の準線であることから、焦点Ｆの ℓ に関する対称点F´は準線 ℓ_2 上にある。

　よって、最初に与えた角を三等分することができることが分かる。

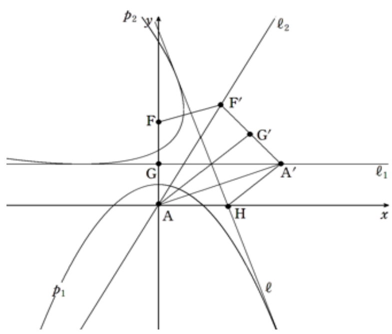

図６

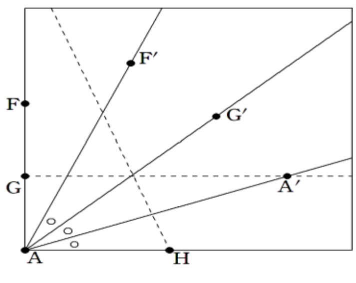

図７

④　③を用いて、角の五等分と５次方程式の解との関連を分析し、証明する。

　③の３次方程式は、二つの放物線の共通接線の傾きから、$\cos\theta$ を求められる。

よって原理的には折り紙による角の三等分は可能であることがわかる。

先行研究から折り紙を使って５次方程式が折れることがわかっているので、５次方程式から角の五等分について考えていく。つまり、$\cos 5\theta$ の解を求めることができれば折り紙による角の五等分が可能となると考える。

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos(2\theta + 3\theta) \\
&= \cos 2\theta \cos 3\theta - \sin 2\theta \sin 3\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 2\sin\theta\cos\theta(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

ここで、$\cos\theta = x$ とすると

$$= (2x^2 - 1)(4x^3 - 3x) - 2x(3\sin^2\theta - 4)$$

$=8x^5-10x^3+3x-2x\{3(1-x^2)-4(1-x^2)^2\}$

$=8x^5-10x^3+3x-2x(-4x^4+5x^2-1)$

$=16x^5-20x^3+5x$

よって、$16x^5-20x^3+5x-\cos 5\theta=0$

この５次方程式の解は折り紙を用いて求めることができるということは、先行研究により分かっている。したがって、任意の５次方程式を解くことができるということは任意の角の五等分が平面上ではできることになる。

これを実際に折り紙の折り過程によって任意の角の五等分が可能となる折り方を見つけていきたい。

$y=ax$（$a=\tan 5\theta$）がこれから五等分したい任意の角をつくる直線とする。

すると任意の角の大きさが5θとなって五等分された角の大きさがθとなる。５次方程式を解いてそれを角の五等分につなげるためには$\tan 5\theta$を$\tan\theta$を用いて表す必要がある。

$\tan 5\theta$を$t=\tan\theta$を用いて表し、$\tan 5\theta=\tan(3\theta+2\theta)$を利用して、計算していけば証明できるのではないか。しかしながら、計算と折り紙を用いて考える部分で計算が難しく、研究が滞っている。

⑤　①～④を用いて、角の素数等分について考察し、証明する。

五等分までで研究が進んでおり、七等分やｎ等分の研究に至っていない。

５　今後の課題とまとめ

今回の研究から折り紙を使った余弦の合成や角の五等分について考える事ができた。余弦の合成方法については実際に簡単に証明できることが分かった。角の五等分については角の三等分の方法を参考にして行ったが失敗した。そこで、角の三等分が３次方程式から考えられていることをもとに５次方程式から考える事に挑戦した。結果としては角の五等分の方法を証明することは間に合わなかったが、今回の研究から折り紙と数学の密接な関係があることが分かり、数学に対する探求心を向上させることができた。

今後も５次方程式から折り紙を使った角の五等分を証明について考えたり、ほかの観点からも考えたりして、角の素数素数等分について研究を進めていきたい。また、折り紙でしか証明できない数学の定理についてもっと考えていきたい。

謝辞

今回の研究を進めるにあたり、ご助言を賜りました日本折り紙学会様に心より感謝申し上げます。

参考文献

・SSH生徒課題研究論文集　平成28年度・日本折紙学会

・平成24年度　上越教育大学公開講座　折紙の数学・数研通信