算額の作成

1年2組　庵﨑　むく　1年2組　黒田紗也佳
1年2組　新城　采音　1年2組　鶴井　美久
1年2組　羽浦あかり　1年2組　横田　千尋
指導者　教諭　藤岡　敦子

1　課題設定の理由

社会の教科書に載っていた太閤検地の写真を見て、土地の面積をどのように測っていたのかを疑問に思った。そこで、和算について調べていくうちに、算額をみつけた。算額に興味を持ち、地域の算額の問題をいくつか解くうちに、自分たちで算額の問題を作成したいと考え、この主題を設定した。

2　仮説

和算とは、日本独自の数学のことである。私たちが普段使用している数学は、ヨーロッパから来た「洋算」というものである。算額とは、和算家が自分の発見した数学の問題や解法を書いて神社などに奉納した絵馬のことである。私たちの使っている数学を利用して、算額が作成できるのではないかと考えた。

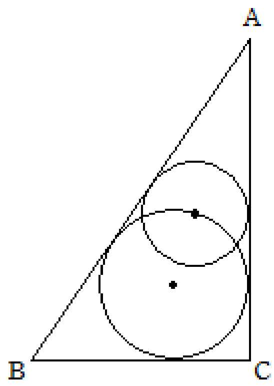
3　実験・研究の方法

算額の問題、解答を作成する。

4　結果と考察

【問題1】

図のように、BC＝10、∠ABC＝60°、∠ACB＝90°の△ABC に内接する大円 O と、大円 O の円周上に中心があり、辺 AB、辺 AC に接する円 R がある。
このとき、小円 R の半径を求めよ。



【解答1】

△ABCについて $AB=20$、$AC=10\sqrt{3}$ である。
大円Oの半径を r、大円OとAB、BC、CAとの接点を

$BE=BD$、$AF=AD$　より　$BE+AF=AB$

$(10-r)+(10\sqrt{3}-r)=20$　よって　$r=5\sqrt{3}-5$

点Aから小円Rの中心を通る直線とBCとの交点をGとする。
AGは角の二等分線であるから、

$$CG=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\times 10=10(2\sqrt{3}-3)$$

△ACGにおいて、三平方の定理より

$$AG=\sqrt{(10\sqrt{3})^2+\{10(2\sqrt{3}-3)\}^2}$$
$$=10(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

$$AF=10\sqrt{3}-(5\sqrt{3}-5)$$
$$=5\sqrt{3}+5$$

よって、$\tan 15^\circ = \dfrac{10(2\sqrt{3}-3)}{10\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

$$\tan^2 15^\circ + 1 = \frac{1}{\cos^2 15^\circ} \quad \text{より} \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \quad \text{より} \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

小円の中心RからOFに垂線RI、ACに垂線RHを引くと

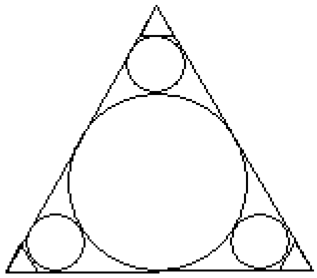
$$OI = OR\sin 15^\circ = \frac{10\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{2}$$

求める半径は、　$RH = OF - OI = \dfrac{10\sqrt{3}-10-10\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{2}$

【問題２】

図のように、大きい三角形の中に小さい三角形が３つ、大円が１つ、大円が１つ、小円が３つある。小さい三角形の１辺の長さが 10 ㎝、大きい正三角形の１辺の長さが 80 ㎝である。

このとき、小さい円の半径を求めよ。



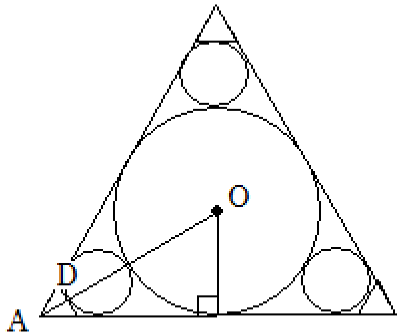
【解答2】

はじめに、大円の半径 r を求める。

$$S = \frac{1}{2}\cdot 80\cdot 80\cdot \sin 60^\circ = 1600\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}r(80+80+80) = 1600\sqrt{3}$$

よって、　$r = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$



$AO : r = 1 : 2$ より、$AO = \dfrac{80\sqrt{3}}{3}$

円と小さい三角形の接点を D とすると

点 D は 小さい三角形の辺の中点であるから、$AD = 5\sqrt{3}$

よって小円の直径は、$\dfrac{80\sqrt{3}}{3} - \left(5\sqrt{3} + \dfrac{40\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{25\sqrt{3}}{3}$

したがって、小円の半径は、$\dfrac{25\sqrt{3}}{3} \div 2 = \dfrac{25\sqrt{3}}{6}$

5　まとめと今後の課題

算額が今の数学にもつながっていることや、昔の数学は、今の数学を使って解くことができるということが分かった。

今後は、逆に今の数学を昔の数学と比較したり、昔の方法で解いたりしてみたい。

参考文献

・桜井　進「夢中になる！江戸の数学」
・吉田　光由「塵劫記」