黄金比

２年４組　森田　崇大
２年４組　徳田進之介
２年４組　柿本　　陸
指導者　渡邉　弘樹

１　課題設定の理由

人が美しいと感じ、自然界にも多く見られる黄金比というものを授業で知り、一見関係のないように思える数学と生物や人の感覚の間に何か密接な関係があるのではないかと興味を持った。また黄金比について深く知ることで、今後の自分たちの日常生活で活かせないかと思った。

２　黄金比とフィボナッチ数列

黄金比とは１：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$という比率で、古代ギリシャから長い間人々の美的感覚を魅了してきた。伝承ではギリシャの彫刻家であるペイディアスが初めて使ったとされレオナルド・ダヴィンチも発見したという記録が残っている。

黄金比において$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$は二次方程式$x^2-x-1=0$の解であり、これを黄金数という。黄金数はギリシャ文字のφ（ファイ）で表される。黄金数には$\varphi^2=\varphi+1$、$\frac{1}{\varphi}=\varphi-1$といった性質がある。

またフィボナッチ数列という数列も不思議なことに黄金比と深い関係がある。ｎ番目のフィボナッチ数をF_nで表すと、$F_0=0$、$F_1=1$、$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$で定義される。これは、二つの初期条件を持つ漸化式である。この数列はフィボナッチ数列と言われ、０、１、１、２、３、５、８、１３、２１、３４、５５、８９、１４４、２３３、３７７、６１０、９８７、１５９７、２５８４、４１８１、６７６５、１０９４６・・・と続く。最初の２項は０、１と定義され、以後どの項もその前の２つの項の和となっている。１２０２年にフィボナッチが発行した「算盤の書」に記載されたことで「フィボナッチ数」と言われているが、以前にもインドの音楽家であるヘマチャンドラが和音の研究により発見し書物に記したことが判明した。

フィボナッチ数列の一般項は次の式で表される。

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\varphi^n-(-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

ここでのφは、上記で記した黄金数で

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=１．６１８０３・・・$$

となる。

隣り合うフィボナッチ数の比は黄金比φに収束する。フィボナッチ数は自然界の現象に数多く出現する。花びらの数はフィボナッチ数であることが多く、パイナップルの螺旋の数も時計回りのものは１３、反時計回り８となっている。また、ハチやアリなど、オスに父親がない家系を辿っていくと、フィボナッチ数列が現れる。（父母２匹、祖父母３匹、曽祖父母５匹、高祖父母８匹・・・）

3　結果と考察

黄金比とフィボナッチ数列の関係について理解することができた。また、アップル社やツイッターなどのロゴもきちんとした黄金比で構成されていることを知った。

そこでフィボナッチ数列と黄金比の関係をもっと深く知るために授業で習った漸化式を用いてフィボナッチ数列の一般項を求めた。

$a_1=1$、$a_2=1$、$a_{n+2}-a_{n+1}=a_n$と表せる数列（フィボナッチ数列）の一般項は三項間の漸化式を用いて

$$a_{n+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right)\quad・・・①$$

$$a_{n+2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right)\quad・・・②$$

①、②より

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

4　まとめ

黄金比というものは、普段私たちが美しいと感じたものの中に多く見られ、そのような身近にあるものを私たちが学んだ数学を用いて、説明できるというところにとても魅力を感じた。また、フィボナッチ数列の一般項を漸化式から導いたときに$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$という値が一部に出てきて、やはり数学というものはすごいと思った。このことから、黄金比とフィボナッチ数列には密接な関係があるということを私たちも実感することができた。これからは、もし気になったことがあって、それを数学で解明できるなら、興味を持ってやってみたいと思う。

参考文献

・特になし