折り紙の可能性

２年３組　太田　百香　２年３組　小松　優衣
２年３組　島田　知佳　２年３組　森中　沙耶
２年４組　渡辺　　華
指導者　濱田　真吾　赤松　弘教

1　課題設定の理由

数学と折り紙にはとても面白い関係がある。一見折り紙といえば、動物や植物を折るだけと思いがちだ。しかし、折り図や展開図などを用いれば数学にも応用することができる。例えば、コンパスと定規を用いて、任意の角を三等分することは不可能であるが、折り紙を用いれば可能である。このことから、折り紙の可能性を探るべく、この課題を設定した。

2　仮説

折り紙を用いれば、自分たちが日頃、計算で解いている数学の図形問題が解けるのではないか。また、折り紙で数学の公式を表すことができるのではないかと考えた。

3　研究の方法

書籍やインターネットから折り紙と数学が関連する問題を探し、以下(1)〜(3)の問題の解法を導く。

(1)　容積最大問題

縦、横の長さがそれぞれ a, b の長方形の紙がある。その四隅から合同な正方形を切り取り、垂直に折り曲げて蓋のない箱を作る。そのとき、容積が最大になるようにするにはどのようにすればよいか。

(2)　折り紙を用いた加法定理の証明

高校数学で習う加法定理について、折り紙を用いて証明する。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

この図形的意味について、折り紙を用いて理解する。

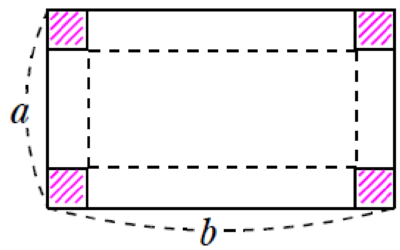
(3)　折り紙で三次方程式の解を折る

二つの放物線の共通接線の傾きは、三次方程式の解の一つになり、その三次方程式の係数は、焦点の座標や、準線の方程式を変更することで任意の三次方程式の解を求めることができる。

4　結果と考察

(1)　箱の容積最大問題

切り取る正方形の一辺の長さを x 、縦の長さを a、横の長さを b、$a<b$ とする。



このとき、$0<x<\frac{a}{2}$　…①

容積は $(a-2x)(\mathrm{b}-2x)x$　となり、展開すると

$(a-2x)(\mathrm{b}-2x)x=4x^3-2(a+b)x^2+abx$　…②

②を微分すると、$\mathrm{f}'(x)=12x^2-4(a+b)x+ab$

$f'(x) = 0$とすると、解の公式を用いて、

$$x = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{4a^2 + 8ab + 4b^2 - 12ab}}{12}$$
$$= \frac{2(a+b) \pm 2\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{12}$$
$$= \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$$

増減表と①より、

$x = \frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ は不適。

$x = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ の場合が最大となる。

手順 1　$\frac{a+b}{2}$の長さを作る

図１のように、長方形を縦横に二つ折りにし、$\frac{a+b}{2}$を作るために、辺 a の二等分線と辺 b の二等分線が重なるように折る。

手順 2　$\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{2}$の長さを作る

折り紙に正方形を作り、**図２**のように、$1:2:\sqrt{3}$の三角形から 60°の角を作る。作った角から余弦定理を用いて**図３**の線分 AB の長さを計算すると、$\sqrt{a^2 - ab + b^2}$ となる。この長さを二等分する。

手順 3　$\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{2}$の長さを作り、三等分する

手順 1 と手順 2 をつなぎ合わせ、**図４**のように三等分する。

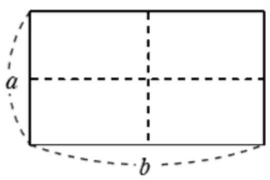


図１

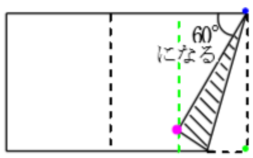


図２

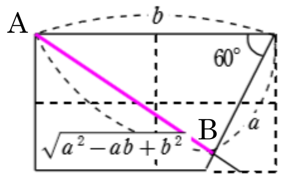


図３

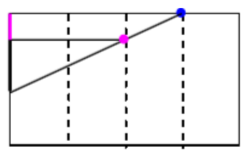


図４

(2)　折り紙を用いた加法定理の証明

手順 1　適当な折り紙を用意し、**図５**のように折る。そして、**図６**のように折り目 BE の長さを 1、折った角度∠CBE を α であったとすると、**図６**のように各辺 CE、BC の長さが $\sin\alpha$ 、 $\cos\alpha$ と表せる。

手順 2　**図７**のように∠ABC＝β とすると、∠DCE＝180°－90°－∠ACB＝β となる。

手順 3　三角比の定理を用いると、角 β と、辺 $\cos\alpha$ から、**図８**のように、各辺 AC、AB $\cos\alpha\sin\beta$ 、 $\cos\alpha\cos\beta$ と表せる。同様に、△CDE の辺 CD、DE も $\sin\alpha\sin\beta$、$\sin\alpha\cos\beta$ と表せる。

手順 4　この時、**図９**のように $\sin(\alpha+\beta)$ を考えたとき、

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

図 10 のように $\cos(\alpha+\beta)$ を考えたとき、

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ となる。

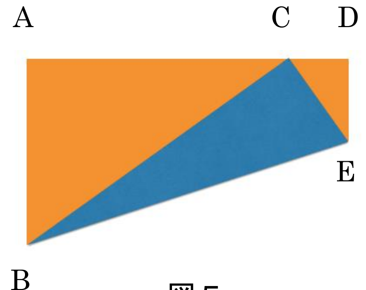


図５

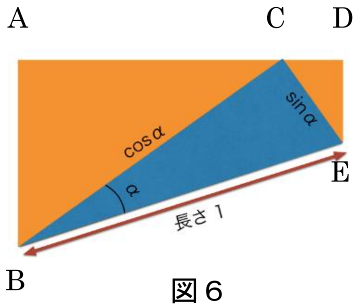


図６

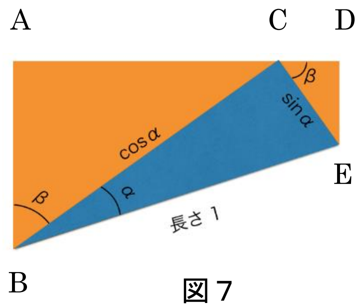


図７

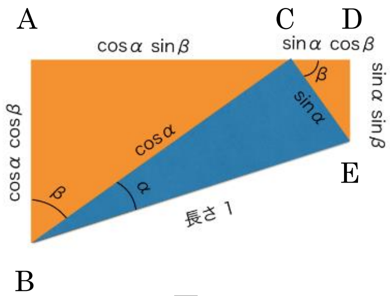


図８

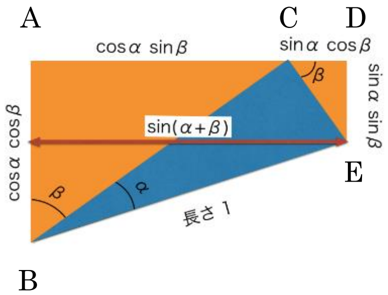


図９

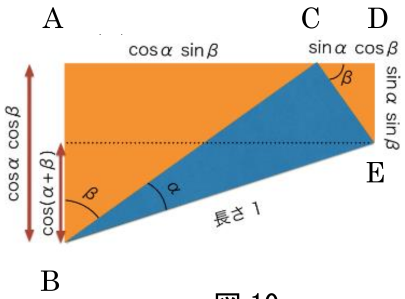


図 10

(3)　折り紙で三次方程式を折る

手順 1　折り紙で三次方程式の解を折るには、**図 11** のように二点 A、B を谷折りし、折り目上に同時に載せ「斜めの線」を作る。ここで、点 D ができる。

手順 2　**図 12** のように、点 A をL_A上の点 A’ におく。A’ を直線L_A上で動かし、線分 AA’ の垂直二等分線をとる。この試行を何度か繰り返す。

→**図 13** のように、放物線になる。

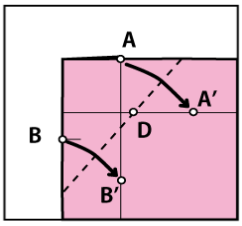


図 11

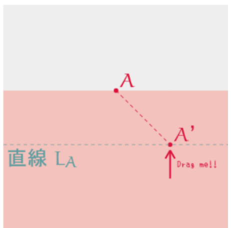


図 12

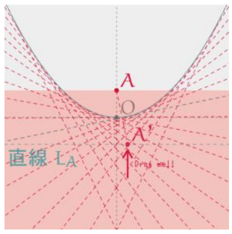


図 13

手順 3　**図 14** のように放物線の点を P(x,y)とする。

点 P(x,y)と焦点(a,b)との距離は $\sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2}$

一方、点 P(x,y)と準線 $y=-a$ との距離は　$y—(-a)$

そして、二つの式は等しいから　$\sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2}=y—(-a)$ となり、

整理すると、点 A(a,b)に関しての放物線の式は　$y=\frac{1}{4a}(x-b)^2$

図 15 のように、点 B が作る放物線も点 A と同様にする。

点 B$(-d,-c)$に関しての放物線の式　$x=-\frac{1}{4d}(y+c)^2$ となる。

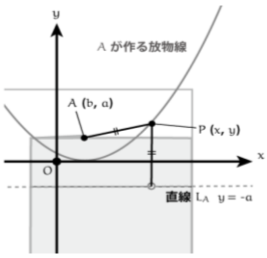


図 14

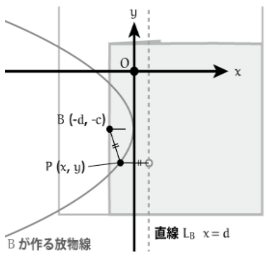


図 15

手順4　点A、Bが作る放物線の共通接線を求める。

図16のように、接線 $y = tx + s$ が放物線Aに接する点を $\mathrm{P}(x, y)$ とおく。

そして、放物線の式の両辺を x で微分すると　$x - b = 2ay'$

接線の傾き t は微分係数 y' と等しいから　$x - b = 2at$

$x = 2at + b$　…①

$y = \frac{1}{4a}(x-b)^2$　に①を代入すると　$y = \frac{1}{4a}(2at)^2 = at^2$　…②

①、②を $y = tx + s$ に代入すると、点Aについての t、s の方程式が得られる。

$s = -at^2 - bt$　…③

図17のように接線 $y = tx + s$ が放物線Bに接する点を $\mathrm{P}(x, y)$ とおく。

同様にして、点Aについての t、s の方程式が得られ

$-s - c - \frac{d}{t} = 0$　…④

③, ④を連立させると　$at^3 + bt^2 - ct - \mathrm{d} = 0$

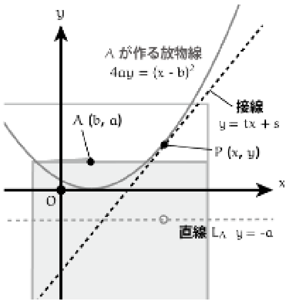


図16

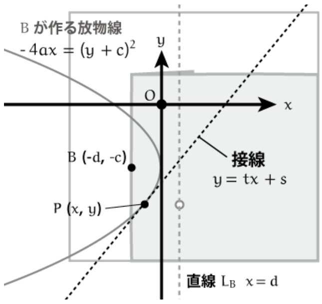


図17

5　まとめと今後の課題

容積最大問題の解法では、折り紙を用いて解くことができることが分かった。加法定理の証明では、α, β の角を作り出し、辺を $\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta$ で表すことで証明できることがわかった。三次方程式の解法については、折り紙が点を直線に折り重ねることができる点を利用し、折り線から得られる放物線の共有接線から三次方程式が解けることがわかる。また三次方程式の係数は、座標や方程式によって表せる。これらの座標や方程式を変更していくことで、任意の三次方程式を解くことができる。今回の研究を通して、折り紙と数学の様々な関連性を見つけることができた。今後はこれらの研究を明らかにするとともに、多重折りを用いた五次方程式の解法についても挑戦したり、他の定理や公式を折り紙を用いて証明したりしていきたい。

参考文献

・直接的に証明する三角関数の加法定理
http://www.yukisako.xyz/entry/kahouteiri
・箱の容積最大問題と折り紙
www10.plala.or.jp/mondai/columun/fold.pdf
・折り紙で三次関数が折れるわけ（前編）
http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/origami-cubic-equation-1
・折り紙で三次関数が折れるわけ（後編）
http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/origami-cubic-equation-2