積分法を用いた曲線
$y=-ax^n+b$の回転体の体積の規則性

２年４組　岡田　直哉　２年４組　末永　怜士　２年４組　高橋　諒汰
指導者　森脇　由衣

１　課題設定の理由

私たちは、円錐の体積を中学時に教わった$(\text{体積}V)=\frac{1}{3}\times(\text{底面積}S)\times(\text{高さ }h)$という公式を用いて求めることができる。この円錐は直線をy軸を軸に回転させた立体と考えることができる。次に、放物線をy軸を軸に回転させた立体の体積を考えるが、円錐のような公式がないため、すぐには求めることができない。同様に、xの n次式$(n\geq 2)$で表される曲線をy軸を軸に回転させた立体の体積もすぐには求めることができない。そこで私たちは、xのn次式：$y=-ax^n+b$で表される曲線をy軸を軸に回転させた立体の体積を求めるための公式を探るため、この課題を設定した。

２　仮説・理論

$y=-ax^n+b$で表される曲線をy軸を軸に回転させた立体の体積Vは、xの指数nと関連して規則性があるのではないか。また、円錐のように$(\text{体積}V)=(\text{定数 }k)\times(\text{底面積}S)\times(\text{高さ }h)$という公式にあてはまる定数 k をnを用いた式で表すことができるのではないかと予想した。

本研究では、$y=-ax^n+b$ $(a>0, b>0)$で表される曲線を y 軸を軸に回転させた立体(以下、回転体とする)を扱う。$y=-ax^n+b$ のグラフは**図１**である。y 切片 b ,x 切片は以下の計算により $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ である。

$$-ax^n+b=0$$

$a>0$ より

$$x^n-\frac{b}{a}=0$$

$$\mathrm{x}=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

本研究で扱う回転体は、$y=0$ で切り取る面を底面とし、y 軸上の線分 OP(原点 O,点 P(0，b)を高さとする**図２**のような立体である。この回転体の体積は積分法を用いると、以下の式で求めることができる。

$$\mathrm{V}=\int_0^b x^2\pi dy$$

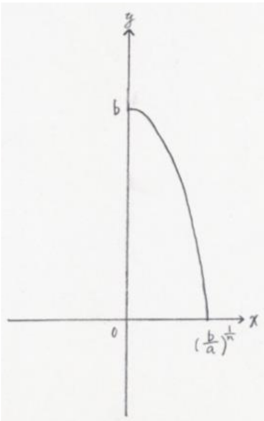

図１

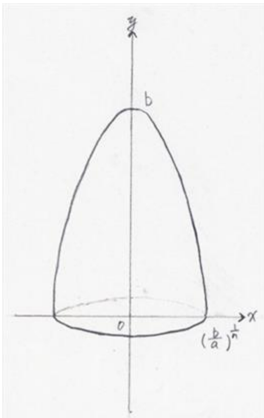

図２

３　研究方法

(1)　$S=4\pi$（半径$r=2$），$a=1$である曲線の回転体の体積から、定数 k を求める。

(ア)　①$y=-x+2$，②$y=-x^2+4$，③$y=-x^3+8$ のグラフを、y 軸を軸として回転させた立体の体積を、積分法を用いて求める。

(イ)　(ア)で求めた体積を、$V=kSh$ の式に入れ、定数 k を求める。

(2)　指数 n と定数 k の関係を比の式で表し、定数 k の規則性を考える。

(3)　(1)と同様にして、$y=-x^n+2^n$ で表される曲線の回転体の体積を求め、定数 k を n の式で表す。

(4)　(1)と同様にして、$y=-ax^n+b$ で表される曲線の回転体の体積を求め、定数 k を n の式で表す。

4　結果

(1)

① $n=1 < y=-x+2 >$ のとき

$$V=\int_0^2 x^2\pi dy$$
$$=\int_0^2 (2-y)^2\pi dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}(2-y)^3\right]_0^2\pi$$
$$=0-(-\frac{1}{3}\times 2^3)\pi$$
$$=\frac{8}{3}\pi$$

$S=4\pi$，$h=2$ より，

$k=\frac{1}{3}$ である。

② $n=2 < y=-x^2+4 >$ のとき

$$V=\int_0^4 x^2\,\pi dy$$
$$=\int_0^4 (4-y)\,\pi dy$$
$$=\left[-\frac{1}{2}(4-y)^2\right]_0^4\pi$$
$$=0-(-\frac{1}{2}\times 4^2)\pi$$
$$=8\pi$$

$S=4\pi$，　$h=4$ より，

$k=\frac{1}{2}$ である。

③ $n=3 < y=-x^3+8 >$ のとき

$$V=\int_0^8 x^2\pi dy$$
$$=\int_0^8 (8-y)^{\frac{2}{3}}\pi dy$$
$$=\left[-\frac{3}{5}(8-y)^{\frac{5}{3}}\right]_0^8\pi$$
$$=0-(-\frac{3}{5}\times 2^5)\pi$$
$$=\frac{96}{5}\pi$$

$S=4\pi$，$h=8$ より，

$k=\frac{3}{5}$ である。

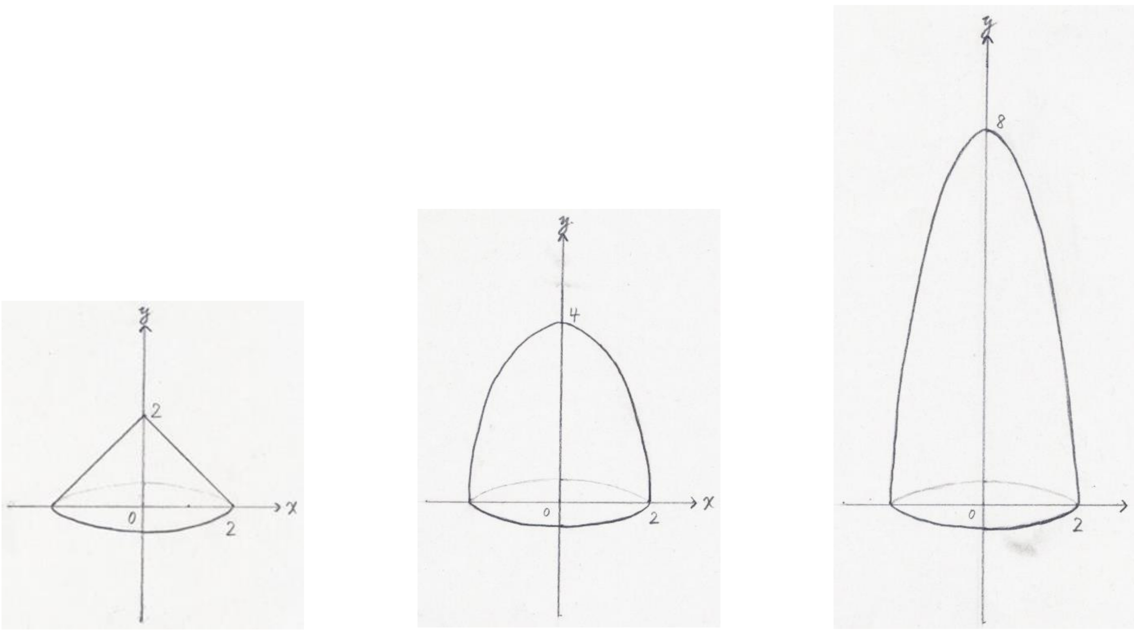

図３：各曲線を y 軸を軸として回転させた立体

(2) ① $n=1$ のとき

$n:k=1:\frac{1}{3}$

$=3:1$

② $n=2$ のとき

$n:k=2:\frac{1}{2}$

$=4:1$

③ $n=3$ のとき

$n:k=3:\frac{3}{5}$

$=5:1$

この結果から $n:k=n+2:1$となり定数 k は $k=\frac{n}{n+2}$ で表すことができると予想される。

(3)

$y=-x^n+2^n$ のとき

$$V=\int_0^{2^n} x^2\pi dy$$

$$=\int_0^{2^n}(2^n-y)^{\frac{2}{n}}\pi dy$$

$$=\left[-\frac{n}{n+2}(2^n-y)^{\frac{n+2}{n}}\right]_0^{2^n}\pi$$

$$=0-\left\{-\frac{n}{n+2}(2^n)^{\frac{n+2}{n}}\right\}\pi$$

$$=\frac{n\times 2^{n+2}}{n+2}\pi$$

$S=4\pi$, $h=2^n$ より,

$k=\frac{n}{n+2}$ である。

(4)

$y=-ax^n+b$ のとき

$$V=\int_0^{b} x^2\pi dy$$

$$=\int_0^{b}\left(\frac{b-y}{a}\right)^{\frac{2}{n}}\pi dy$$

$$=\left[-a\times\frac{n}{n+2}\left(\frac{b-y}{a}\right)^{\frac{n+2}{n}}\right]_0^{b}\pi$$

$$=0-\left\{-a\times\frac{n}{n+2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n+2}{n}}\right\}\pi$$

$$=\frac{an}{n+2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n+2}{n}}\pi$$

高さ b, 底面積 $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n}}\pi$ より, $k=\frac{n}{n+2}$ である。

5　まとめと今後の課題

今回は、積分法を用いて、 $y = -ax^n + b$ で表される曲線の回転体の体積を求めた。まず、底面積 4π となるような曲線 $y = -x^n + 2^n (n = 1,2,3\ldots)$ を用いて回転体の体積を求めた。 定数 k と x の指数 n との間に規則性が見られ、定数 k は x の指数 n を用いて、 $k = \frac{n}{n+2}$ と表されると分かった。この規則性はより一般化した曲線 $y = -ax^n + b$ の回転体の体積でも同様に見られた。よって、$y = -ax^n + b$ で表される回転体の体積は、$V = \frac{n}{n+2}Sh$ となることが分かった。

今後の課題として、円柱などの立体を回転させたものの体積を求め、その体積の規則性を見つけていきたい。さらに、自分たちで求めた $k = \frac{n}{n+2}$ を活用する方法を探したい。

謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方々に研究協力と指導助言をいただいた。懇切丁寧な御指導を賜り、心から御礼申し上げる。

参考文献

・矢野健太郎，1975，解析幾何図形と方程式，p.89－93，日本評論社

・きさらぎひろし，2015，やさしい高校数学（数Ⅲ），p.536－548，p.655－665，株式会社　学研プラス