フラクタル次元による宇和島市の複雑さの解析

２年４組　伊勢　将平　２年４組　清家　碧斗　２年４組　横田　章悟
指導者　井上　栄治

1　課題設定の理由

フラクタルとは、細部を拡大すると全体と似ているという特徴（＝自己相似性）をもった図形のことで、ベノワ・マンデルブロによって提唱された。自然界にはこの性質が存在していると考えられており、例えばリアス海岸があげられる。かなり複雑な形をしているが、一部を拡大すると見えなかったさらに細かい海岸線が見えてくる。つまり、海岸線は拡大しても同じような複雑な形状をしているといえる。もし、海岸線が完全なフラクタル幾何であれば、その海岸線の長さは理論上無限大になる。これまでに、理論的に考案されているフラクタル幾何としては、コッホ曲線（**図１**）やシェルピンスキーガスケット（**図２**）などがある。

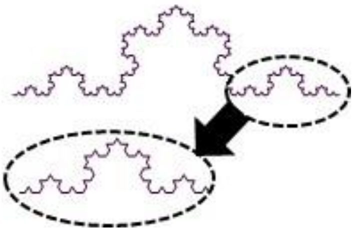

図１：コッホ曲線

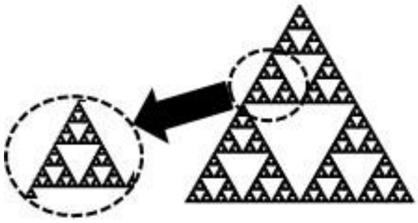

図２：シェルピンスキーガスケット

フラクタルは、すでにいくつかの分野に応用されていて、近年ではその数学的美しさからコンピューターグラフィックスの表現の一手法となっている。さらに、図形の複雑さを定量化することができるフラクタル次元という概念も確立されている。これは、「1/n 倍の図形 n^D 個で充填できるとき、その図形の次元を D とする」というものである。通常、１次元は線、２次元は面、３次元は立体を表すが、フラクタル幾何は非整数の次元をもつ。例えば、**図１**のコッホ曲線であれば約 1.26 次元、**図２**のガスケットは約 1.58 次元である。その他にも、カントール集合は約 0.63 次元、メンガーのスポンジは約 2.73 次元であることが計算されている。これらは、複雑さが増すほど、次元が大きくなっていくことがわかっている。我々はこの概念についてより追求していこうと考え、リアス海岸で有名な三陸海岸と地元宇和島の海岸線の複雑さはどの程度異なるのかを知りたくて、この課題を設定した。さらに、研究を進めるうちに、今年度修学旅行で訪れた栃木県日光市のいろは坂を地図上で見つけ、その形状の複雑さに興味を覚え、地元にある曲がりくねった道とのフラクタル次元を比較してみたいと思い研究を進めた。

2　仮説

(1)　海岸線について

有名なリアス海岸である三陸海岸と宇和島市の海岸のフラクタル次元をそれぞれ計算して比較した場合、見た目どおり三陸海岸のほうが、次元が高い、すなわち複雑である。

(2)　道路について

ヘアピンカーブが続く栃木県の第一いろは坂と、我々の地元にある曲がりくねった道におけるフラクタル次元をそれぞれ計算して比較した場合、いろは坂のほうが、次元が高い、すなわち複雑である。

3　研究の方法

まず、国土地理院の HP から入手できる基盤地図情報を利用して、対象とする地図データを入手する。そして、それぞれのフラクタル次元を計算する。計算手段として、ボックスカウント法を用いた。

(1)　対象

[海岸線] ①　三陸海岸
　　　　②　宇和島の海岸線
[道路]　③　栃木県日光市第一いろは坂（国道 12 号線）
　　　　④　西予市野福峠（県道 45 号線）
　　　　⑤　宇和島市三間町則（県道 31 号線）
　　　　⑥　宇和島市祝森（県道 46 号線）

(2)　ボックスカウント法を用いたフラクタル次元の計算方法

ボックスカウント法とは、1 辺が r の正方形で細分化（今回は方眼用紙）し、分析対象を一部でも含むボックスの個数 $N(r)$ を数える方法である。r の値は、2^n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ で変化していくと、r と $N(r)$ には、次のような関係が成り立つ。ただし、C は定数である。

$$N(r) = \mathrm{C} \times r^{-D} \quad \ldots \quad ①$$

この両辺の対数をとると、対数の性質より

$$\log N(r) = -\mathrm{D}\log r + \log \mathrm{C}$$

となる。したがって、r と $N(r)$ の対数をグラフにプロットして、近似直線の傾きがフラクタル次元 D となる。地図のような平面におけるフラクタル解析では、D 値は 1≦D≦2 の範囲で値が算出される。対象図形の自己相似性が高く、複雑であればあるほど、D 値は 2 に近づいていく。

今回は、**図３**のように、方眼紙およびその拡大コピーを用いてボックスの数を数えた。正方形の 1 辺のサイズは、1 mm、2 mm、4 mm、8 mm、16 mm、32 mm の 6 種類。数えた結果をエクセルでグラフ化し線形近似曲線の傾きを算出した。

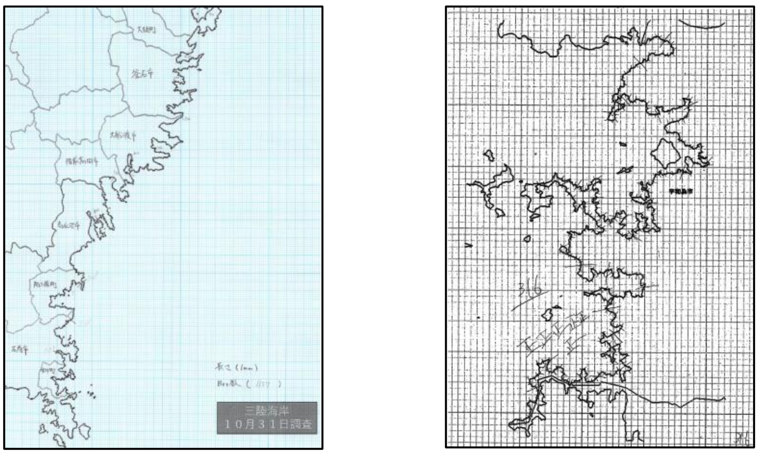

図３：調査用紙（左：三陸 1 mm、右：宇和島 4 mm）

4　結果と考察

(1)　海岸線

表１：①三陸海岸

r (mm)	N（個）
1	1157
2	398
4	179
8	67
16	29
32	13

表２：②宇和島の海岸線

r (mm)	N（個）
1	1372
2	752
4	316
8	152
16	56
32	19

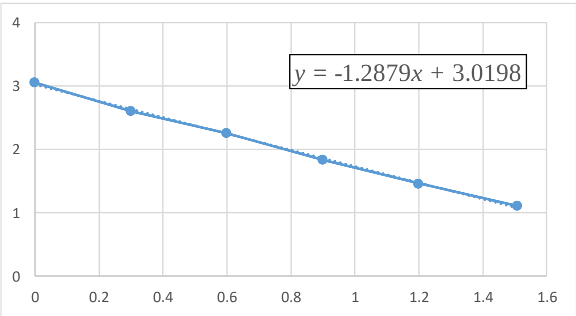

図４：①三陸海岸

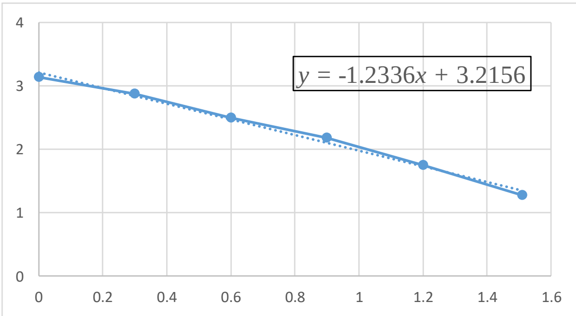

図５：②宇和島市の海岸線

三陸海岸のフラクタル次元が 1.2879、宇和島市は 1.2336 となり、仮説通り三陸海岸のほうがより複雑であることがわかった。しかしながら、宇和島の海岸も予想以上の数値が出たので、リアス海岸として全国的にもっと有名になってほしいと思った。

(2)　道路

表３：③いろは坂

r (mm)	N（個）
1	777
2	361
4	156
8	62
16	24
32	7

表４：④野福峠

r (mm)	N（個）
1	364
2	169
4	80
8	34
16	17
32	6

表５：⑤三間町則

r (mm)	N（個）
1	271
2	141
4	63
8	32
16	13
32	7

表６：⑥祝森

r (mm)	N（個）
1	272
2	127
4	74
8	41
16	13
32	7

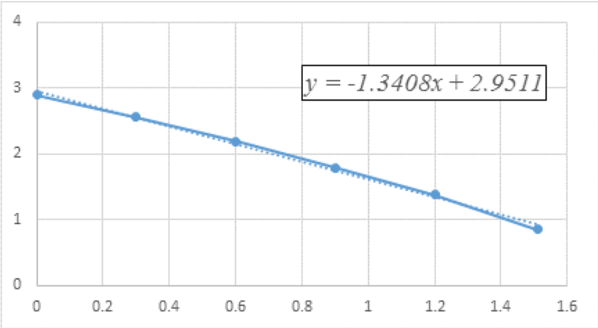

図６：③いろは坂

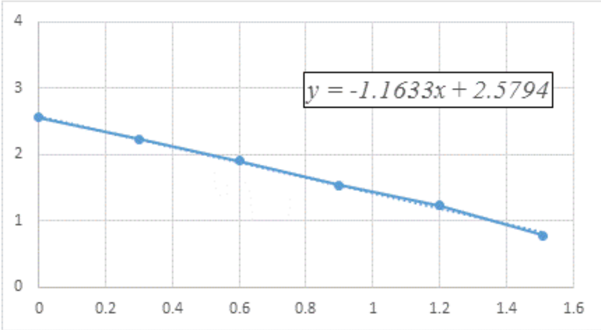

図７：④野福峠

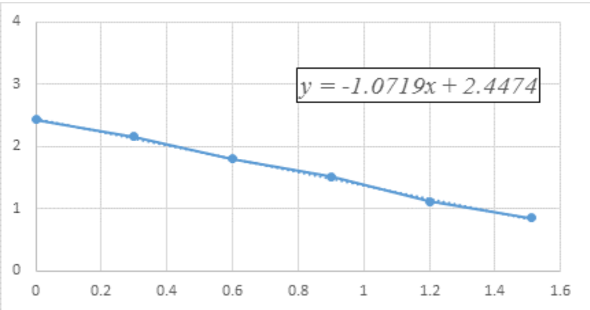

図８：⑤三間町則

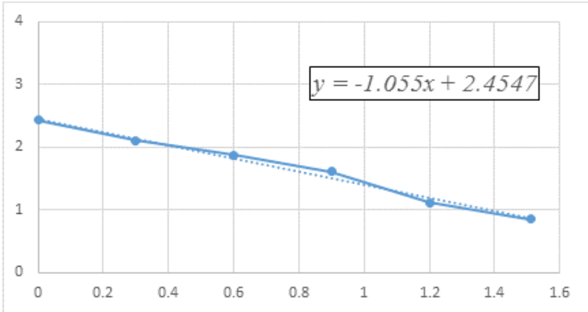

図９：⑥宇和島市祝森

いろは坂は 1.3408 次元となり、他を圧倒する結果となった。地図上での測定のため高低差を考慮することができていないが、やはり「いろは坂」での車の運転は容易でないと考えられる。

5　まとめと今後の課題

研究開始頃は、先行研究や文献の読みが浅かったこともあり、結果がうまくでない場合が多かった。当初、コンパスを用いて距離を測定する方法を採用していたが、正確性にかなり欠けていて、良いデータが得られなかった。途中からボックスカウント法を用いて調査研究したところ、より正確性のある結果が出た。今後は、さらに正確性を高めるために、手作業でなく、パソコン上でデータを読み込み、自動的かつ正確に計算できるツールの習得を試みたい。

また、平面上の計算だけでなく、高低差を考慮したり、現地に行って体感することをしてみたいと思った。そして、本年度は挫折してしまったが、プログラミング言語を習得し、何かしらのフラクタルを描画してみたいと思った。

今回の調査により、三陸海岸やいろは坂など、見た目で複雑な場合は、やはりフラクタル次元も大きな値が算出された。フラクタル次元を計算することで複雑さを数値化できる面白さを感じたが、その有用性についてはまだまだ未知数であるとも感じた。参考文献[4]にある消防署を中心とした街の道路の複雑性を研究するような、我々の生活に役立つ調査研究内容を考えてみたい。

参考文献

・マンデルブロー著　弘中平和監訳「フラクタル幾何学（最新増補版）」
・児野武郎（2010）「表面粗さ曲線のフラクタル解析」（長野県工技センター研報）
・村上次男「フラクタルと地理学」
・和栗健・前田義信・牧野秀夫「道路網のフラクタル次元に関する基礎研究」
・今村文彦・西山英彰「拡張フラクタル次元を用いた海岸線形状の解析」