チェッカージャンプの謎

２年４組　友　颯太郎　　２年４組　木村　宙夢
２年４組　岡崎　拓也　　２年４組　信藤　倫太
指導者　河野　芳文

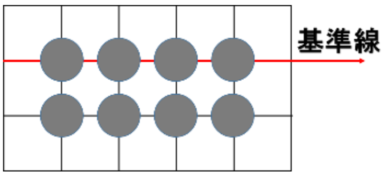
１　課題設定の理由

私たちは「チェッカージャンプ」という興味深いゲームがあることを知ったが、駒をｙ＝４までは移動できてもｙ＝５まで移動することはできないと知り、その証明をどうするのか知るために先行研究について調べた。その上で、条件を変えればどんな結論が得られるか調べたいと考え、証明のアイデアや原理を数列やベクトルの知識を用いて吟味・考察した。さらに一般的結論や知見を得たいと研究を行っている。

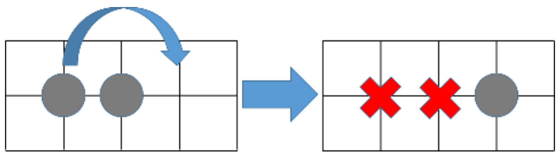
２　先行研究

「チェッカージャンプ」とは以下のようなゲームである。

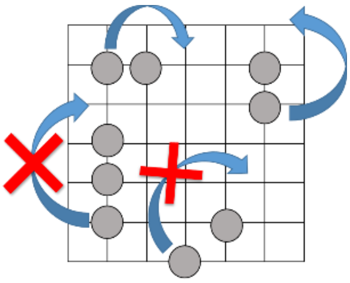
① 方眼用紙を用意し、横線の一つを基準線（０段目）とする。
② いくつかの駒を基準線以下の格子点に置く（※１）。
③ 縦横に駒が隣り合っているとき、駒を飛び越えることができる。
④ このとき、飛び越えられた駒は取り除く（※２）。
⑤ ただし、２つの駒を同時に飛び越えたり斜めに飛び越えたりすることはできない（※３）。
⑥ 以上のルールのもと駒を動かし、基準線よりどれだけ上の段に上げられるかを競う。



※１

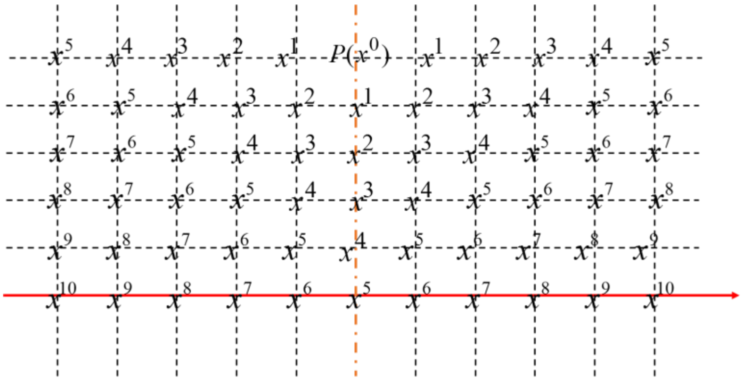


※２



※３

１～４段目までは到達可能ということがすでにわかっている。



※４

５段目には到達できないことを示すためにある到達したい点を$P(=x^0)$とする。そして、すべての格子点にxのべきを与える（※４）。

次に動きを

① Ｐに近づく移動　$x^n \to (x^{n+1}+x^{n+2})$

② Ｐから遠ざかる移動　$x^{n+2} \to (x^{n+1}+x^n)$

③ Ｐと等距離の移動　$x^n \to (x^{n+1}+x^n)$

の３つの場合に分ける

①　Ｐに近づく移動前後のxのべきの合計が等しいとすると、

$$x^n-(x^{n+1}+x^{n+2})=x^n(1-x-x^2)=0$$

方程式$x^2=1-x$　と　値$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cong 0{,}618$の式が得られる

②　Ｐから遠ざかる移動

先程の$x^2=1-x$の方程式を用いて計算すると、

$$x^{n+2}-(x^{n+1}+x^n)=x^n(x^2-x-1)=x^n(-2x)<0$$

③　Ｐと等距離の移動

同様に$x^2=1-x$の方程式を用いて計算すると

$$x^n-(x^{n+1}+x^n)=-x^{n+1}<0$$

よって移動でxのべきの合計が増えることはない

点Ｐのもつxのべきはx^0＝１より、点Ｐに到達するためには最低でも開始前にxのべきの合計が１以上であることが必要である。

基準線より下に、 xのべきを無限個用意できると仮定する。

無限の列のxのべきの合計Ｓは、等比数列の考え$x^n+x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots=\frac{x^n}{1-x}$を用いて表すと、

$$S=\frac{x^5}{1-x}+2\left(\frac{x^6}{1-x}+\frac{x^7}{1-x}+\frac{x^8}{1-x}+\cdots\right)=\frac{x^5}{1-x}+\frac{2x^6}{1-x}(1+x+x^2+\cdots)$$

$$=\frac{x^5}{1-x}+\frac{2x^6}{1-x}\times\frac{1}{1-x}=1$$

よって、無限個のべきを用意したとしてもxのべきの合計は１にしかならない。

無限個のべきを用意すること、また無限回の操作を行うことは不可能であるため、５段目の点Ｐに到達すことは不可能である。

３　研究の方法

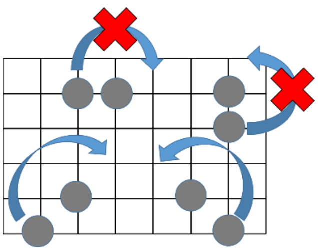
① 私たちは、設定した課題を考察するために、以下のような方法を採用した。

② ゲームの仕組みを理解し、そのルールに従って問題の解を調べ、考え方を探る。

③ 先行研究について理解し、その手法等について研究を深める。

④ 移動ルールを左斜め方向、右斜め方向の動きに変更し、到達可能な高さの限界を考察する（※５）。

※５

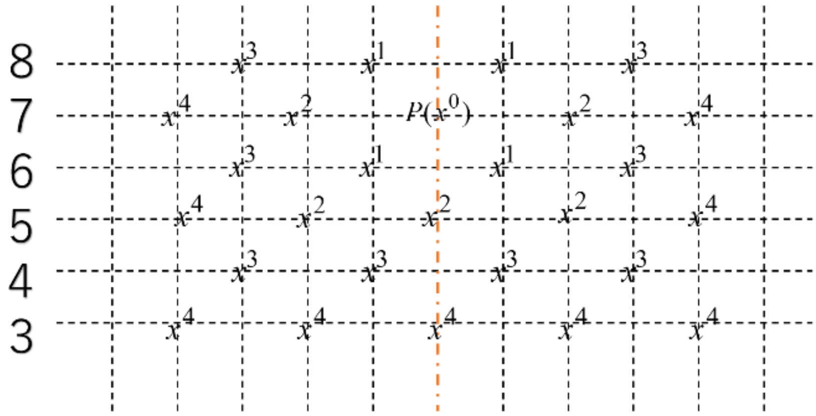


4　結果と考察

私たちの設定した移動では、方向の異なる２つのベクトルの４倍の和の終点が到達しうる高さの限界であると気づいた。そこで、この考え方での限界である８段目の１段下の７段目も到達出来ないと予想し、その証明を行った。

７段目には到達できないことを背理法で示すために、ある到達したい点を$P(=X^0)$とする。

そして、すべての格子点にxのべきを与える（※６）。



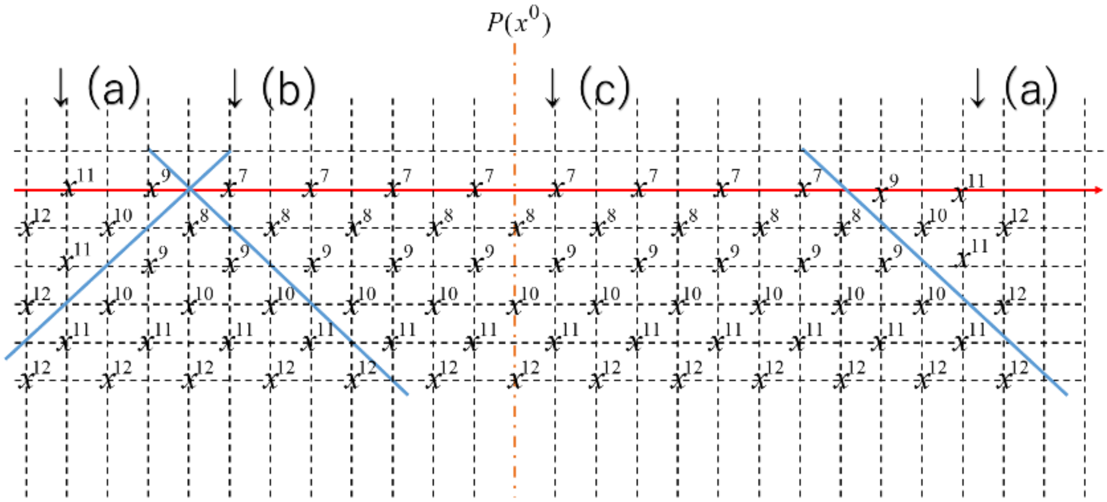
※６

そして、先程と同様に動きを①～③に分けて、①の移動ではxのべきの

合計が変わらないようにすると、方程式$x^2 = 1 - x$　と　$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}618$の

値が得られる。

xのべきの合計を※７のように分けて考える。



※７

a の場合　$2(x^9 + x^{10} + x^{11} + \cdots) = \frac{2x^9}{1-x}$　　$2\left(\frac{x^9}{1-x} + \frac{x^{11}}{1-x} + \cdots\right) = \frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)} = 2x^6$

b の場合　$x^8 + x^9 + x^{10} + \cdots = \frac{x^8}{1-x}$　　$\frac{x^8}{1-x} + \frac{x^9}{1-x} + \cdots = \frac{x^8}{(1-x)^2} = x^4$

c の場合　$8(x^7 + x^8 + \cdots) = \frac{8x^7}{1-x} = 8x^5$

以上より

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} = 2x^6 + x^4 + 8x^5 = 21x - 12 = 0.978 \ldots < 1$$

よって合計値は、駒を基準線以下に無限個置いたとしても１より小さくなるので、斜めの移動では７段目には到達できない。

なお、同様に６段目での計算を行うと、基準線以下のxのべきの合計は１より大きくなるので６段目には到達できる可能性が高い。

５　まとめと今後の課題

今回の研究において、移動の高さの限界決定におけるベクトルのｙ成分の重要性を明らかにすることができた。今後は、自由度が高く、かつｙ成分の移動が大きい移動を考察し、さらなる高みを目指して、研究を続けたい。

参考文献

・Ross Honsberger (Mathematical Association of America),(1976) ,Mathematical Germs Ⅱ,23-28