チェッカージャンプの一般化

２年３組　浅井　明日　２年３組　小川　陽太
２年４組　堀内　文太　２年４組　土居　涼子
指導者　河野　芳文

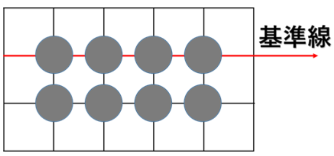
１　課題設定の理由

チェッカージャンプというボードゲームがある。このゲームは、格子線を用意し、基準線を決めたうえで、基準線以下におかれた駒をルールに従って移動させ、駒がどれだけ上に行けるかを競うゲームである。先輩方はこのゲームには到達可能限界点が存在することに着目し、最高到達可能点についての研究を行ってきた。私たちは先輩方の研究を引き継ぎ、より一般な条件のもとで考察を行っていきたいと考えた。

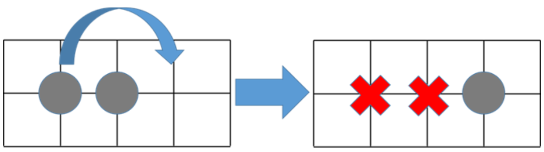
２　先行研究

「チェッカージャンプ」のルール

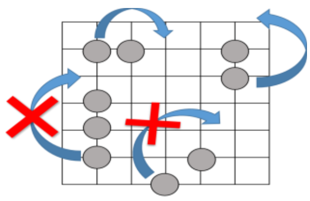
① 方眼用紙を用意し、横線の１つを基準線（０段目）とする。
② いくつかの駒を基準線以下に並べる。（**図１**）
③ 縦横に駒が隣り合っているとき、駒はもう一方の駒を飛び越えることができる。
このとき、飛び越えられた駒は取り除く。（**図２**）
２つの駒を同時に飛び越えたり斜めに飛ぶことはできない。（**図３**）
④ 以上のルールのもと駒を動かし、駒を基準線からどれだけ上の段に上げられるか競う。



（**図１**）



（**図２**）

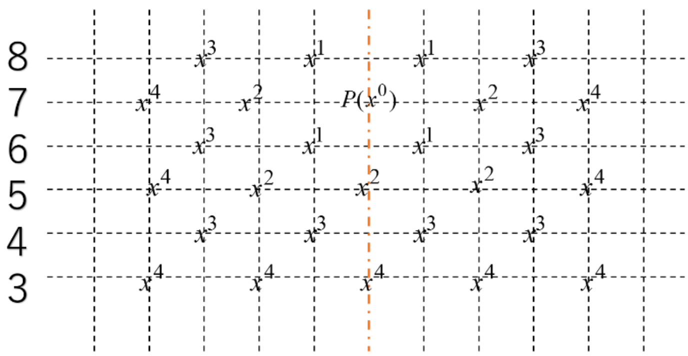


（**図３**）

このルールに従って駒を動かした場合の到達可能限界点は４段目であることは証明されている。先輩方はこの移動ルールを左斜め方向、右斜め方向の動きに変更し、到達可能限界点を証明し、６段目であることを証明した。

両斜め方向の移動の場合、７段目には到達できないことを示すために、到達したい点を $\mathrm{P}(x^0=1)$とする。そして、すべての格子点に χ のべきを次のように与える。

P（x^0）から移動のルールにしたがって、１回で移動できる点に χ、２回で移動できる点に x^2、…、ｎ回で移動できる点に x^n を与えると（**図４**）を得る。



（**図４**）

駒の移動を次の３つの場合に分ける。

① P に近づく移動　　$x^{n+2}+x^{n+1}\to x^n$

② P から遠ざかる移動　　$x^n+x^{n+1}\to x^{n+2}$

③ P までの距離が不変な移動　　$x^n+x^{n+1}\to x^n$

①P に近づく移動前後の xのべきの合計が等しいとすると

$$x^n-(x^{n+2}+x^{n+1})=x^n(x^2-x+1)=0$$

この式より、方程式 $x^2=1-x$と、値 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cong 0.618$ がえられる。

②P から遠ざかる移動

先程の方程式 $x^2=1-x$を用いて計算すると

$$x^{n+2}-(x^n+x^{n+1})=x^n(x^2-1-x)=x^n(-2x)<0$$

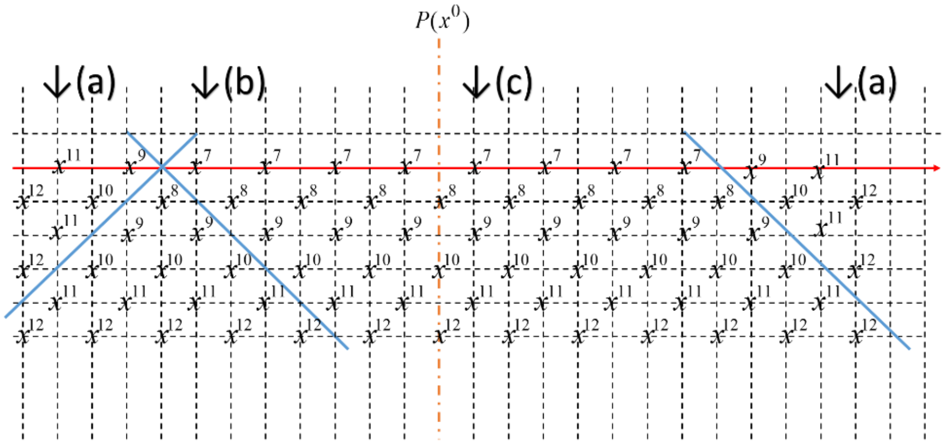
③P までに距離が不変な移動

同様に方程式 $x^2=1-x$を用いて計算すると

$$x^n-(x^n+x^{n+1})=-x^{n+1}<0$$

よって、移動でのxのべきの合計は増えることはない。点 P がもつxのべきは$x^0=1$であるため、点 P に到達するためには、最初に配置するxのべきの合計が 1 以上である必要がある。

次に、７段目に到達できないことを証明する。基準線以下にxのべきが無限個配置できると仮定し、xのべきを（**図５**）のように分けてそれぞれを計算し、べきの合計を求める。



（**図５**）

(a) 左右対称な 2 列において、例えば x^9から始まる列の和は

$$2(x^9+x^{10}+x^{11}+\cdots)=\frac{2x^9}{1-x}$$

となり、総和は

$$2\left(\frac{x^9}{1-x}+\frac{x^{11}}{1-x}+\cdots\right)=\frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)}=2x^6$$

となる。

(b) 斜めの 1 列において、

$$x^8+x^9+x^{10}+\cdots=\frac{x^8}{1-x}$$

となり、総和は

$$\frac{x^8}{1-x}+\frac{x^9}{1-x}+\cdots=\frac{x^8}{(1-x)^2}=x^4$$

となる。

(c)同じ並びが、8 列あるから、

$$8(x^7+x^8+\cdots)=\frac{8x^7}{1-x}=8x^5$$

となる。

以上より　　$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=2x^6+x^4+8x^5=21x-12=0.978\cdots<1$

よって、xのべきの合計が 1 に満たないため、両斜め移動では 7 段目に到達できない。

なお、5 段目の場合も同様に計算して、xのべきの合計が 1 以上であるとともに、実際に 5 段目まで到達できることを確認した。さらに、6 段目についても同様に計算すると合計は 1 以上となる。したがって 6 段目に到達できる可能性は高い。

3　研究の方法

① ゲームの仕組みと先行研究における証明方法を理解する。
② 先輩方の設定したルールにおける駒の動かし方を一般化する。
③ このルールに従って駒を動かした場合の各段に到達するまでの最短手順を考察し、証明する。

4　結果と考察

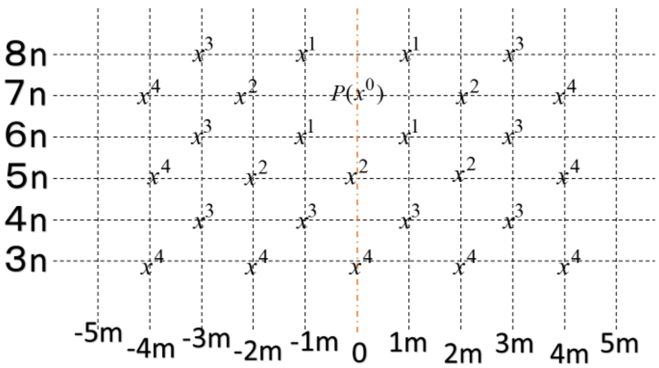
私たちは、この両斜め方向の移動の最高到達点を一般化した。

駒の動きを、互いに素な自然数 m,n を用いて右斜め方向に（m,n)、左斜め方向に（−m,n）とする。この場合、縦 n マス、横 m マスで 1 マスとみなすことができる。すると、xのべきの配置が（図６）のようになり、(図４）と同じ配置になる。xのべきの合計も同様に計算でき、7n 段目の場合の合計は

$$21x-12=0.978\cdots<1$$

となるから、7n 段目は到達不可能である。

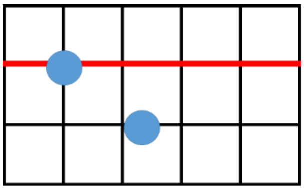
なお、最高到達点は n にのみ依存し、6n 段目に到達できる可能性が高い。



（図６）

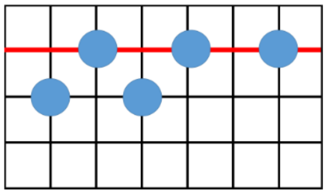
また、実際に５段目まで到達することは可能であることを実証し、最短手順の駒の配置を発見した。

１段目の時　$x+x^2=1$　（**図７**）



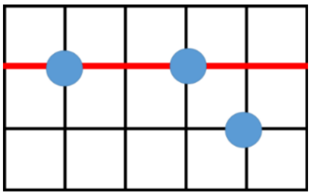
（**図７**）

２段目の時　$2x^2+x^3=1$　（**図８**）



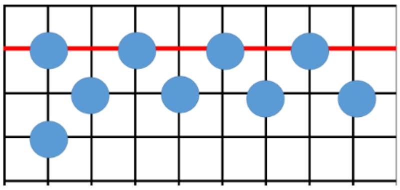
（**図８**）

３段目の時　$3x^3+2x^4=1$　（**図９**）



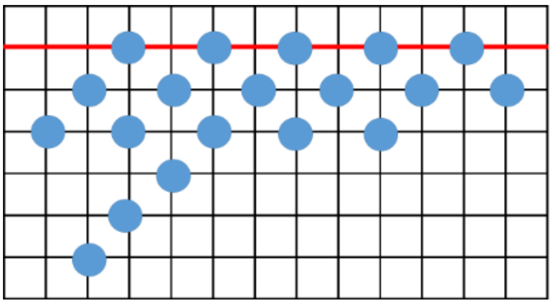
（**図９**）

４段目の時　$4x^4+4x^5+x^6=1$　（**図１０**）



（**図１０**）

５段目の時　$5x^5+6x^6+5x^7+x^8+x^9+x^{10}=1$（**図１１**）



（**図１１**）

５　まとめと今後の課題

左右対称な両斜め方向の動きの場合について駒の最高到達点を考察し、先輩方の結果を一般化することができた。また、１～５段目までは到達可能であることを実証し、最短手順の駒の配置の例をあげることができたが、６段目について計算上は可能であろうとの結果は得たものの、それを実証するには至っていない。したがって、今後は６段目に到達できることを実証し、最短手順の駒の配置を見出すとともに、左右非対称な斜め移動の場合における最高到達点の考察を進めて、結果の一般化を目指して研究を続けていきたいと考えている。

６　参考文献

Ross Honsberger,1976,Mathematical Gems Ⅱ,p23-28