

偽物を見分ける最少手順

2年3組 河田 拓之 2年3組 本田 祐輔 2年4組 山本 剛大
指導者 渡邊 弘樹

1 課題設定の理由

テレビで、天秤を数回使用して1枚だけ重さが違うのコインを見つけることができる^[1]というのを見て、どのような手順で偽物を探すのか、手順に規則性はあるのかもっと詳しく知りたいと思いこの課題を設定した。

2 仮説

天秤を用いて偽物のコイン(他と重さが異なるコイン)を最少手順で探し出すとき、コインの枚数と天秤を使う最少手順には、規則性があるのではないかと疑問に思ったから。

3 実験方法

- (1) 天秤を使う回数を k 、コイン（重さが重いか軽いかははっきり分かっている）の枚数を N とする。天秤を使う回数 k が1増えるときのコインの枚数 N を調べる。
- (2) N と k を使って一般化する。

4 結果と考察

(1) 結果 (表1)

(表1)

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k		1	1	2	2	2	2	2	2	3

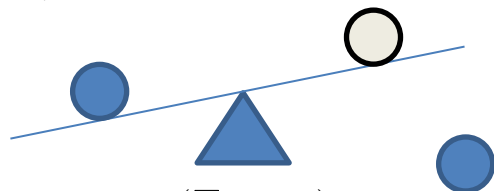
N	11	12	13	...	25	26	27	28	29	30
k	3	3	3	...	3	3	3	4	4	4

N 枚のコインから偽物を見分けるのに天秤を使う最少手順 k の関係を、 $N_{\max} = 3^k$ と表すことができるのではないかと考えた。

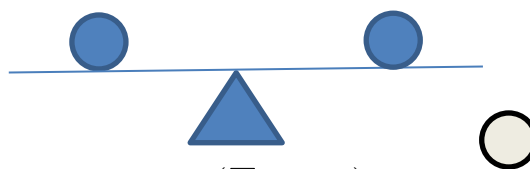
天秤を使う回数を k とし、 k 回で見分けることができるコインの最大の枚数を N_{\max} とした。

- (2) 証明 (偽物のコインが軽い場合として考える) ● 本物のコイン ○ 偽物のコイン
(A) 3個の場合 (図1)

天秤が傾いた場合、軽い方が偽物。つり合った場合、乗せていない方が偽物。



(図1-1)

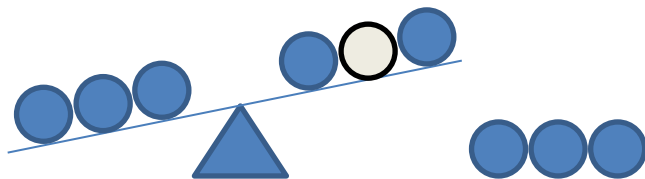


(図1-2)

(B) 9個の場合

3個ずつの3グループに分け、2グループを天秤にかける。

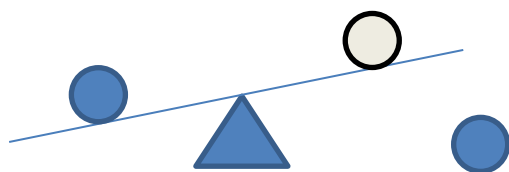
(1) 天秤が傾いた場合 (図2、3)



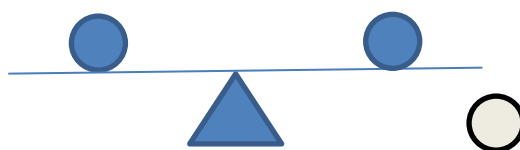
(図2)

軽いグループをさらに天秤にかける。

あとは3個の場合と同様であるから、1回の天秤の使用で判別できる。

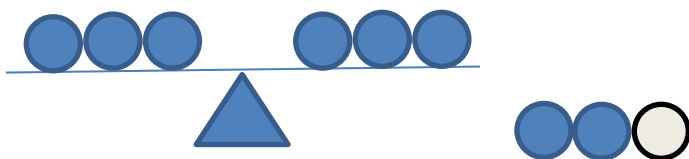


(図3-1)



(図3-2)

(2) 2つのグループが釣り合った場合 (図4)



(図4)

残りのグループに偽物がある。

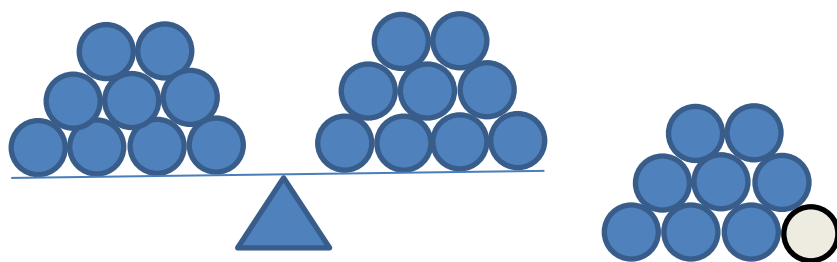
先程と同じように残ったグループをさらに天秤にかける。

あとは3個の場合と同様であるから、1回の天秤の使用で判別できる。

(C) 27個の場合

9個ずつの3グループに分け、2グループを天秤にかける。

(1) 天秤が釣り合った場合 (図5)

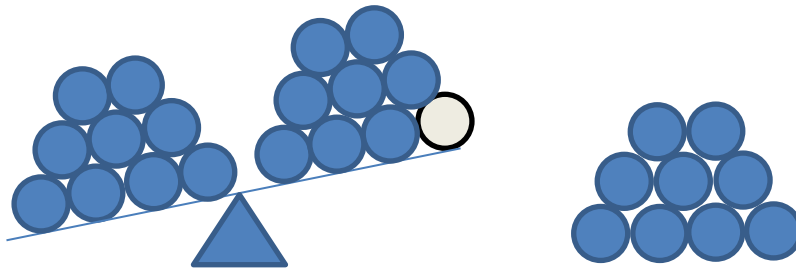


(図5)

残りのグループをさらに天秤にかける。

残りは、上記の9個の場合と同様の手順で、2回の天秤の使用で判別できる。

(2) 天秤が傾いた場合 (図 6)

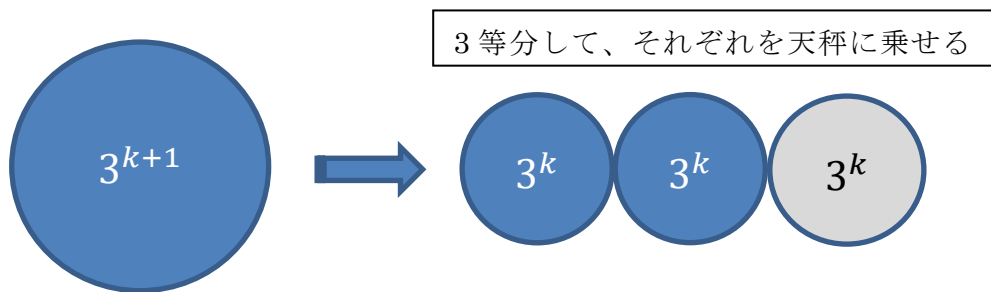


(図 6)

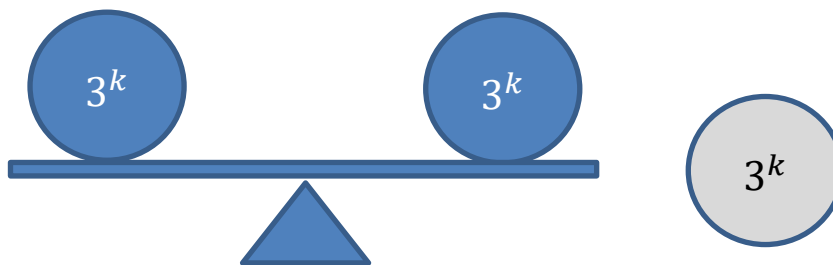
軽い方をさらに天秤にかける。

こちらも 9 個の場合と同様の手順で、2 回の天秤の使用で判別できる。

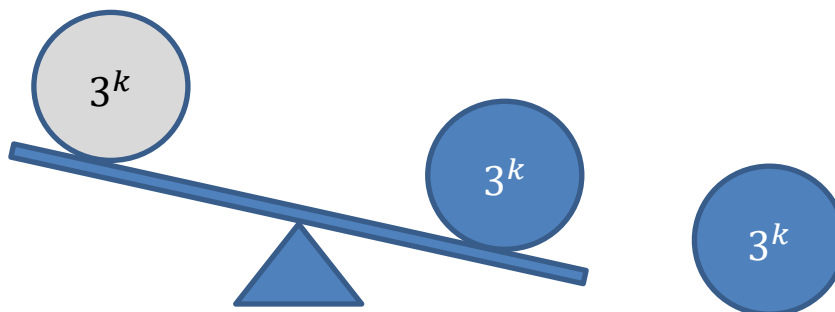
(D) 3^k 個の場合 (図 7 ~ 9)



(図 7)



(図 8)



(図 9)

数学的帰納法を用いて、 $N_{max}=3^k$ であることを証明する。

(1) $k=1$ のとき

3 個の場合は天秤の使用回数 1 回で見分けることができる。

したがって、 $N_{max} = 3^1 = 3$

- (2) $n = k$ のとき、つまり、 3^k 個の場合 k 回で見分けることができると仮定すると、
 $n = 3^{k+1}$ のとき
 $3^{k+1} = 3^k \times 3$

上の図のように 1 回天秤に乗せることで、どの 3^k 個の中に偽物のコインが含まれているかを判別することができる。残った 3^k 個の場合は、仮定より k 回で見分けられる。よって、 3^{k+1} 個は $k + 1$ 回で見分けることができる。

- (1)、(2) より、すべての自然数 k について $N_{max} = 3^k$ が成り立つ。 (証明終)

5 今後の課題

今回は、コインの重さが重いか軽いかわかっている条件で実験を行ったため、比較的簡単にコインをどのように分ければよいか分かった。実際に自分達自身で規則性を見つけたり、証明したりすることは難しかったが、担当の先生からヒントをいただいたり、分かりやすく教えていただいたりして解決することが出来た。実際にコインをどのように分ければ良いか試行錯誤して考えることはとても困難だったが、分かったときの嬉しさはとても大きかった。

今後は、コインの重さが重いか軽いかわからない条件で実験を行っていきたい。

6 参考文献

- [1] フジテレビ 「熱血！平成教育学院」 2010 年 12 月 12 日放送分
https://www.fujitv.co.jp/b_hp/gakuin_r/