パーフェクトシャッフルの規則性に関する研究

１年１組　土居友一朗　１年２組　瀬野　　大　１年２組　清家　拓実
１年４組　服部　大生　１年４組　堀内　介太
指導者　井上　栄治

１　課題設定の理由

偶数枚のトランプを２つに分割し、それぞれの端どうしを噛み合わせそのまま１つに揃えることをリフルシャッフルという。そのリフルシャッフルを最も正確に行う（パーフェクトシャッフルと呼ばれる）と 52 枚のカードが、たった８回目のシャッフルで元の位置に戻るということを知った。シャッフルを繰り返したとき、カードの動き方には何かしらの法則があるだろうと考え、その性質を深く知りたくて研究を始めた。

２　研究の方法

(1)　トランプカードを用いて、**図１**のようにインシャッフル（※最初と最後のカードが動かない方法をアウトシャッフルと呼ぶ）を繰り返し行い、元の配置になるまでの回数や各カードの位置の変化を調べる。カードは、２枚から 54 枚（ただし、偶数枚のみ）と増やしていく。
(2)　得られた結果から規則性などについて考察を行う。
(3)　考察した内容について、合同式などを用いた数学的な証明を行う。

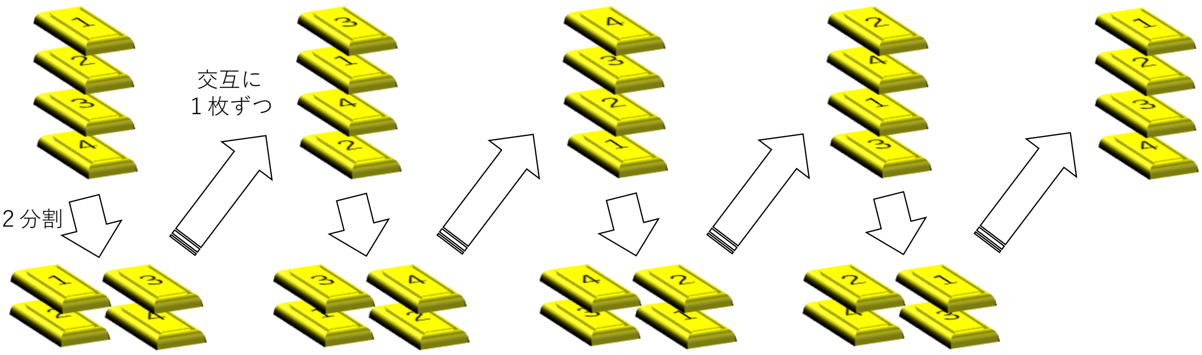

図１　インシャッフルの流れ（例：４枚の場合４回で元通りになる）

３　実験結果と考察

表１　インシャッフルでの実験結果（カードの枚数と元に戻るまでの回数）

枚数	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54
回数	2	4	3	6	10	12	8	8	18	6	11	20	18	28	5	10	12	36	12	20	14	12	23	21	8	52	40

表１の結果およびカードの位置が変化する過程から、次のような考察が得られた。
［１］　すべてのカードが元の位置に戻る最小回数は、カードの枚数以下である。
［２］　１番目のカードの位置が元に戻るまでの回数は、各カードの位置が元に戻るまでの回数の倍数である。

４　証明

３で得られた考察［１］および［２］について数学的な証明を行うため、シャッフルを行う際にカードが何番目にあるかについての合同式をまず準備する。以下の合同式は、$m+1$ を法とし

たものとして記述する。

（ｉ） シャッフルを１回行ったとき、n 番目にあるカードが $f(n)$ 番目に移るものとすると、

$$f(n)=\begin{cases} 2n & \left(1 \leqq n \leqq \frac{m}{2}\right) \\ 2n-(m+1) & \left(\frac{m}{2}+1 \leqq n \leqq m\right) \end{cases}$$ （ただし、m はカードの枚数）

このことから、$f(n) \equiv 2n$ が成り立つ。

シャッフルを ℓ 回行った時、n 番目のカードが $f^{\ell}(n)$ 番目にあるものとする。

このとき、$f^{\ell}(n) \equiv 2^{\ell}\ n$ が成り立つ。

（ⅱ） シャッフルを繰り返し行い、ℓ 回でカードの配置が元に戻るとき、つまり n 番目のカードが n 番目に戻るとき、$f^{\ell}(n) \equiv n$ より、$2^{\ell}n \equiv n$ が成り立つ。

［１］の証明：

完了する最小回数をＬとする。$1 \leqq \ell \leqq m+1$ で変化する ℓ に対して、$2^{\ell} \equiv k$ となるような k $(1 \leqq k \leqq m)$ が存在する。ここで、ℓ は $m+1$ 個，k は m 個なので k の値が必ず１つは重複する。すなわち、$\ell_1 < \ell_2$ とし、$\ell = \ell_1$ のとき $k=k_1$、$\ell = \ell_2$ のとき $k=k_2$ とした場合、$k_1=k_2$ となるような ℓ_1，ℓ_2 が存在する。さらに、$1 \leqq \ell_1 \leqq m+1$ かつ $1 \leqq \ell_2 \leqq m+1$，$\ell_1 < \ell_2$ であるから、$1 \leqq \ell_2 - \ell_1 \leqq m$ となる。よって、$2^{\ell_1} \equiv 2^{\ell_2}$ である。このとき、2 と $m+1$ は互いに素なので、$2^{\ell_2-\ell_1} \equiv 1$ が成り立つ。特に、$\ell_2 - \ell_1$ が最小となるような ℓ_1，ℓ_2 について、Ｌ＝$\ell_2 - \ell_1$、$1 \leqq \ell_2 - \ell_1 \leqq m$ なので、Ｌ＝ $\ell_2 - \ell_1 \leqq m$ となる。したがって、すべてのカードが元の位置に戻る最小回数Ｌは、カードの枚数 m 以下であることが言える。

［２］の証明：

$2^{\ell} \equiv 1$ ならば、$\left(2^{\ell}\right)n \equiv n$ である。

シャッフルを繰り返し行い、１番目のカードが１番目に戻るとき、n 番目のカードは n 番目にある。つまり、$f^{\ell}(1)=1$のとき、$f^{\ell}(n)=n$である。

シャッフルを ℓ' 回行ったとき、初めて n 番目のカードが n 番目に戻るとすると、

$f^{\ell'}(n)=n$ より，　$f^{s\ell'}(n)=n$ （ s は自然数）

ここで､ℓ' は $f^{\ell}(n)=n$ を満たす最小の自然数なので､$f^{x}(n)=n$ を満たす x は $s\ell'$と表せる。$f^{\ell}(1)=1$ のとき、$f^{\ell}(n)=n$ であるから、ℓ は上式を満たすので、$\ell = s\ell'$と表せる。したがって、１番目のカードの位置が元に戻るまでの回数は、各カードの位置が元に戻るまでの回数の倍数であると言える。

５　今後の課題

パーフェクトシャッフルについては、先行研究が多くなされているが、すべてのことを調べることができなかったので調査を広げていきたい。

参考文献

・群論 これはおもしろい「トランプで学ぶ群」、飯高茂、共立出版
・第 15 回 JST 数学キャラバン「カードのシャフルと合同式」、鈴木武史
・トランプのパーフェクトシャッフルの一般化 (Website “Taro is here!”)