三次元チェッカージャンプ

２年３組　金寄　公紀　２年３組　上甲　隼人
２年４組　片山　　俊　２年４組　林　　尚史
指導者　河野　芳文

１　課題設定の理由

チェッカージャンプというボードゲームがある。このゲームは格子線を用意し、基準線を決めたうえで、基準線以下におかれた駒をルールに従って移動させ、駒がどれだけ上に行けるかを競うゲームである。先輩方の研究から、チェッカージャンプの到達可能限界点について、縦横移動においては５段目以降、両斜め移動においては７段目以降が到達不可能であることが証明された。私たちは、平面における移動をこれ以上考えることは難しいと考え、平面から次元をあげた空間における移動を研究しようと考えた。

２　先行研究

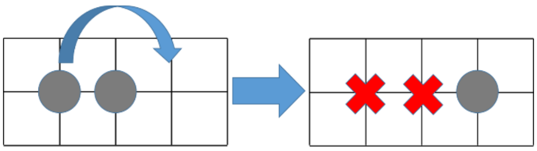

図１

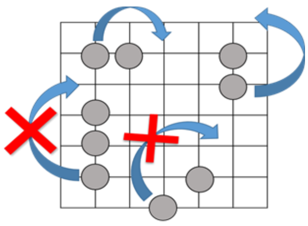

図２

チェッカージャンプのルール

① 方眼用紙を用意し、横線の一つを基準線(０段目)とする。

② いくつかの駒を基準線以下にならべる。

③ 縦横に駒が隣り合っているとき、駒はもう一方の駒を飛び越えることができる。(**図１**) このとき、飛び越えられた駒は取り除く。2 つの駒を同時に飛び越えたり斜めに飛び越えたりすることはできない。(**図２**)

④ 以上のルールのもと駒を動かし、駒を基準線からどれだけ上の段にあげることができるかを競う。

友ら (2017) はルール③における縦横移動を斜め移動に変更して行い、縦横には飛ぶことができないとした。到達したい点を P$(=x^0)$とし、すべての格子点に（**図３**）のようにxのべきを与える。前提条件として、駒の移動を 3 つの場合に分け、それぞれ方程式を立てて計算する。

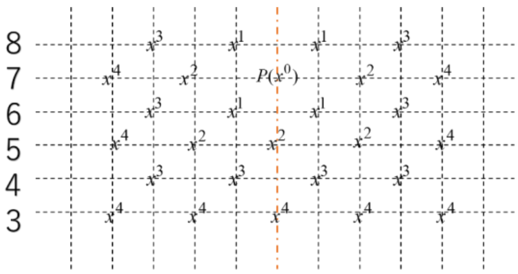

図３

①P に近づく移動	$x^n-(x^{n+1}+x^{n+2})=x^n(1-x-x^2)=0$
②P から遠ざかる移動	$x^{n+2}-(x^{n+1}+x^n)=x^n(x^2-x-1)=x^n(-2x)<0$
③P と等距離の移動	$x^n-(x^{n+1}+x^n)=-x^{n+1}<0$

３式より、移動によってxのべきが増えることはない。点 P のもつxのべきは$x^0=1$であるため、点 P に到達するためには、最初に配置するxのべきの合計が 1 以上である必要がある。

斜め移動の場合では、７段目以降に到達できないことを証明する。基準線以下にxのべきを無限個配置できると仮定し、xのべきを（**図４**）のように分けてそれぞれ計算し、べきの合計を求める。

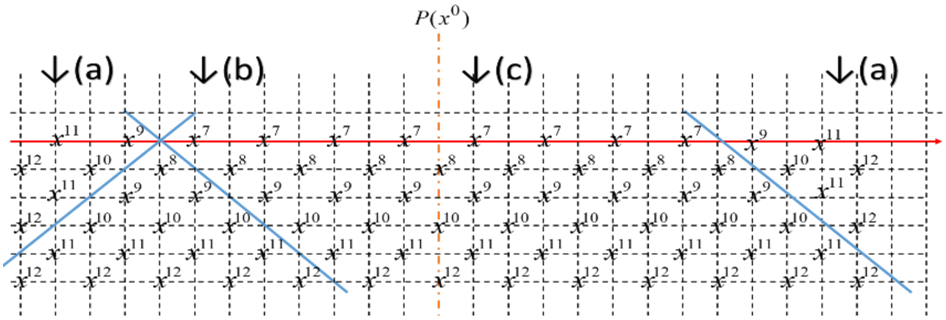

図４

a の場合　$2(x^9+x^{10}+x^{11}+\cdots)=2\frac{x^9}{1-x}$,　　,$2\left(\frac{x^9}{1-x}+\frac{x^{11}}{1-x}+\cdots\right)=2\frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)}=2x^6$

b の場合　$x^8+x^9+x^{10}+\cdots=\frac{x^8}{1-x}$,　　,$\frac{x^8}{1-x}+\frac{x^9}{1-x}+\cdots=\frac{x^8}{(1-x)^2}=x^4$,

c の場合　$8(x^7+x^8+\cdots)=\frac{8x^7}{1-x}=8x^5$

これらの合計は　$a+b+c=2x^6+x^4+8x^5=21x-12=0.978<1$

よって、xのべきの合計が 1 に満たないため、両斜め移動では 7 段目に到達できない。

浅井ら（2018）は、両斜め移動の最高到達点を一般化した。駒の動きを互いに素な自然数 m、n を用いて右斜め方向に（m,n）左斜め方向に（-m,n）とする。この場合、縦 n マス、横 m マスで 1 マスとみなすことができる。すると、xのべきの配置が（**図５**）のようになる。xのべきの合計も同様に計算でき、７n 段目の場合の合計は

$$21x-12=0.978\cdots<1$$

となるから、7n 段目には到達不可能である。

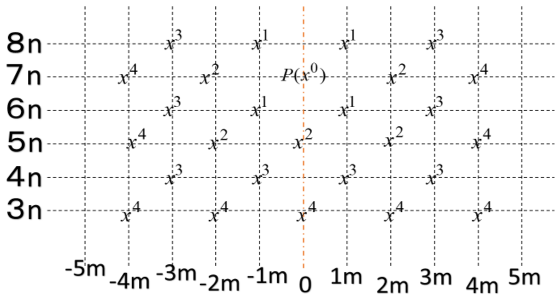

図５

また、最短手順での駒の配置は以下の通りとなる（5 段目まで）。
（**図６～１０**）

1 段目　$x+x^2=1$
2 段目　$2x^2+x^3=1$
3 段目　$3x^3+2x^4=1$
4 段目　$4x^4+4x^5+x^6=1$
5 段目　$5x^5+6x^6+5x^7+x^8+x^9+x^{10}=1$

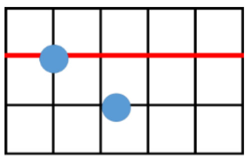

図６

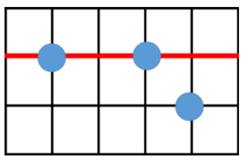

図７

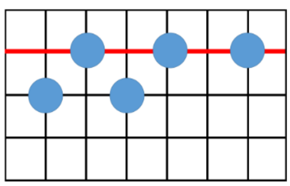

図８

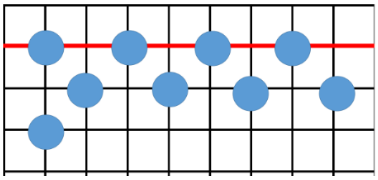

図９

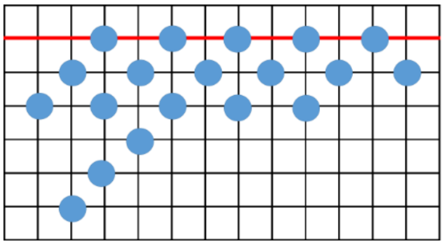

図 10

３　研究の方法

①　ゲームの仕組みと先行研究における証明方法を理解する。

②　平面から空間へと次元を上げた場合のルールを定義する。

③　このルールに従って証明を行う。

４　結果と考察

空間における上下、前後、左右移動の場合の最高到達点の証明を行う。

xy平面を基準面に設定し、xy平面以下のxのべきの合計を計算する。到達したい点Ｐが$(0,\ 0,\ 2)$の場合について考えると、原点にx^2、原点の周りの正方形にx^3が４つ、その周りの正方形にx^4が８つ、その周りの正方形にx^5が 12……と並び(**図 11**)、それぞれの点の下に連続した無数のxのべきが並ぶ。したがって、xy平面以下のすべての点にxのべきをおくならば、それらの合計は

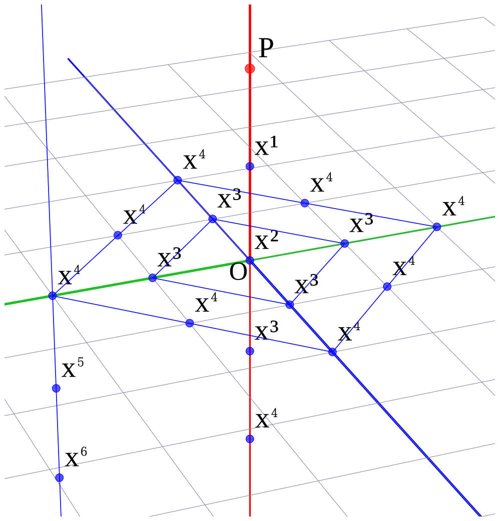

図 11

$$x^2+x^3+x^4\cdots+4(x^3+x^4+x^5\cdots)+8(x^4+x^5+x^6\cdots)\cdots$$

と表される。計算して

$$\frac{x^2}{1-x}+\frac{4x^3}{1-x}+\frac{8x^4}{1-x}+\cdots=\frac{x^2}{1-x}(1+4x+8x^2+\cdots)=\frac{x^2}{1-x}+4x(1+2x+3x^2\cdots)$$

ここで、数列の和の部分を計算する。

$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$　とおくと

$$\begin{aligned}S_n&=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}\\ -)\,xS_n&=x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\\ \hline (1-x)S_n&=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n\\ &=\frac{1(1-x^{n-1})}{1-x}-nx^n\\ \therefore S_n&=\frac{(1-x^{n-1})-nx^n(1-x)^2}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

したがって　n→ ∞　のとき　$x^n\to 0$　になることを用いると

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n-1} - nx^n(1 - 2x + x^2)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ゆえに、全てのべきの合計は

$$\frac{x^n}{1+x} + 4x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2(1-x) + 4x}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2 + 4x}{(1-x)^2} = 1 + \frac{4x}{(1-x)^2} = 1 + \frac{4(1-x)}{1-x} = 1 + 16.942$$
$$= 17.942$$

よって、２段目の点Ｐに、計算上到達可能であることが示された。

３段目は、原点にx^3、原点の周りの正方形にx^4が４つ、その周りの正方形にx^5が８つ……と、それぞれのべきにxがかけられたものが並ぶので、xy平面以下のすべての点にxのべきをおくならば、その合計は２段目の合計にxをかけることで求められる。

４段目以降も同様に考えると、

３段目…（２段目の合計）× x≒11.088
４段目…（３段目の合計）× x≒6.852384
５段目…（４段目の合計）× x≒4.23477
６段目…（５断面の合計）× x≒2.61709
７段目…（６段目の合計）× x≒1.61736
８段目…（７段目の合計）× x≒0.999…

したがって、理論的には７段目まで上ることが可能であると言える。８段目以降は、べきの合計が１未満であるため、到達は不可能であると考えられる。

５　今後の課題

今回の研究で、空間における上下縦横移動の場合の最高到達可能点について考察し、証明した。その結果、７段目まで到達可能であることが確かめられた。しかし、浅井ら（2019）の研究のように最短手順での駒の配置を示すことはできていない。したがって、今後はそれを究明することが課題として挙げられる。

参考文献

・Ross Honsberger, 1976, Mathematical Gems Ⅱ, p23-28
・友ら、「チェッカージャンプの謎」、『平成 29 年度愛媛県立宇和島東高等学校 SSH 生徒課題研究論文集』
・浅井ら、「チェッカージャンプの一般化」、『平成 30 年度愛媛県立宇和島東高等学校 SSH 生徒課題研究論文集』